

Notas de Clase R. Urbán R

Capítulo 1.

Elementos de álgebra.

“I know what you’re thinking about,” said Tweedledum; “but
it isn’t so, nohow.”
“Contrariwise,” Tweedledee, “ if it was so, it might be; and if it
were so, it would be; but as it isn’t, it ain’t. That’s logic.”
Lewis, Carroll, p139¹

Como conjuntar una ciencia pura como la matemática y una ciencia social como la economía. Es decir, ¿Usamos las matemáticas como una herramienta para la economía, o usamos la economía como un campo de aplicación para las matemáticas? En este libro no vamos a responder a esta pregunta, se la dejamos al lector. Para los autores, será más apropiado hablar de "matemáticas y economía".

El estudio del análisis matemático al estudio de la economía y para tratar de que este objetivo se cumpla en lo posible, obliga a realizar un repaso de la matemática que nos permita refrendar este conocimiento para comprender mejor sus aplicaciones al análisis económico.

La matemática le permite al economista ser precisos en la definición de variables, establecer claramente las hipótesis de trabajo y ser lógico en el desarrollo del análisis económico. Este es un capítulo remedial, aquellos lectores que así lo consideren pueden pasar al siguiente.

Empezaremos por un repaso de lógica matemática como una disciplina de las matemáticas introducida a finales del siglo XIX, con el objetivo de estudiar las matemáticas como lenguaje. En una charla entre amigos es común escuchar “*es lógico*”, para expresar una obviedad, una aceptación de un hecho o su rechazo. En este capítulo vamos a formalizar esta reflexión “*lógica*”. La teoría de conjuntos es una rama de la lógica matemática que se encarga de estudiar las características de grupos de objetos y el algebra de los polinomios, muchas funciones económicas requieren trabajar con funciones polinómicas, en varias variables, que requieren un conocimiento básico para su mejor comprensión.

1.1 **Lógica matemática**

La lógica es definida por Aristóteles como “la ciencia de la demostración, pues sólo se preocupa de formular reglas para alcanzar verdades a través de la demostración”². Los matemáticos griegos de la antigüedad estaban enfocados en presentar la ciencia como teoremas puramente deductivos que, a su vez, sirven para deducir otros teoremas para que al final nos ayude a deducir axiomas; por ejemplo, una frase que es evidente y que no requiere de demostración, “los nacidos en México son mexicanos”.

¹ Daep, Ulrich , Gorkin Pamela. Reading, Writing and proving. A close look at mathematics, second edition. Springer. New York. 2011

² Elisabetta Di Castro Stringher (Coordinadora). CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES DE FILOSOFIA. Vol I. McGraw-Hill UNAM, México 2006.

La lógica matemática, nace para la mayoría de los autores, con George Boole y Augustus De Morgan³. Se atribuye a De Morgan la expresión de que “los dos ojos de las ciencias exactas son la matemática y la lógica”. En 1838, De Morgan introduce el concepto de “Inducción matemática” tal y como lo conocemos hoy en día. Es posible que este matemático y otros ingleses como Peacock, Babbage y Herschel influyeron en George Boole quien en 1854, publica su famoso texto **The laws of Thought**⁴, base de lo que conocemos como lógica simbólica. Muchos matemáticos posteriores a Boole han enriquecido con sus aportes han ayudado a conocer y entender mejor el estudio de la lógica matemática como Peano, Frege, Ernst D. Schröder, Richard Dedekind.

La lógica matemática es una disciplina que nos obliga a ser precisos y cuidadosos. Tiene un lenguaje exacto. Mediante expresiones proporciona reglas y técnicas para ayudarnos a exponer un argumento de manera formal. Utiliza un lenguaje cotidiano y ordenado con reglas precisas, similar a las que debemos seguir en cualquier deporte o juego de mesa, nos ayuda a aprender una forma de razonamiento exacto y muy importante en la solución de problemas económicos y sociales.

1.1.1 **Proposiciones o enunciados.**

Una proposición es una expresión que puede ser falsa o verdadera, pero no ambas. Como en el lenguaje natural, en matemáticas trabajamos con objetos como nombres, colores, conjuntos, etc. Por ejemplo,

Yo tengo los ojos verdes
Ernesto es más alto que Juan
 $2 + 2 = 6$

Se consideran dos clases de proposiciones; atómicas y moleculares. Considere las siguientes proposiciones.

- A: *Hoy es viernes*
- B: *Los pumas son un buen equipo*
- C: $x + y = z + 5$
- D: *Si naces en Morelos eres mexicano.*
- E: *Todos los que respiran están vivos*
- F: *Todos los que respiran están sanos.*

³ En 1847 publica George Boole THE MATHEMATICAL ANALYSIS OF LOGIC, Cambridge, Londres y August De Morgan FORMAL LOGIC OR CALCULUS OF INFERENCES, en Londres

⁴ George Boole, LAS LEYES DEL PENSAMIENTO, en inglés, “The laws of Thought”. Este documento se puede descargar libremente del sitio <http://www.gutenberg.org>

Estos ejemplos son proposiciones simples o atómicas, pueden tomar un valor lógico. Para el ejemplo A , si hoy es sábado, la proposición será falsa. De la misma manera, para la proposición C , $x + y = z + 5$ la determinación de verdadera o falsa dependerá de los valores de las variables x , y y z , lo mismo para los demás ejemplos. La afirmación de certeza dependerá de si la proposición es verdadera o falsa.

Hay diferencias entre un enunciado y una oración, ya que en un enunciado lo que nos interesa es el resultado.

E1: Todos los que respiran están vivos.

E2: Todos los que están vivos respiran.

Son dos oraciones que nos dan el mismo resultado, es la misma proposición.

Una frase como la siguiente.

G: Préstame tu lápiz.

H: Escribe un poema.

No son proposiciones porque no son una afirmación, no pueden tomar un valor Verdadero o Falso.

Si juntamos varias proposiciones atómicas formamos proposiciones moleculares. Como en los ejemplos siguientes:

- *El café está frío o está caliente*
- *El día está nublado y el tiempo es frío*
- *Si la población aumenta y la producción agrícola permanece constante entonces el precio de los alimentos sube⁵*
- *Si $x + y = 6$ y $y = 3$ entonces $x = 3$*

Para simbolizar proposiciones, atómicas o moleculares, utilizamos letras mayúsculas, como en las proposiciones anteriores.

a) *(El café está frío) o (está caliente)* está formada de las proposiciones atómicas:

A: El café está frío

B; está caliente

Simbólicamente se puede expresar como $A \text{ o } B$

b) *(El día esta nublado) y (el tiempo es frío)* está formada por:

C: El día está nublado

D; el tiempo es frío

Simbólicamente se puede expresar como $C \text{ y } D$

⁵ David Ricardo, Principios de Economía Política y Tributación, Londres. 1817, En el capítulo 2 habla sobre la ley de los rendimientos decrecientes en la agricultura y la renta de la tierra, de aquí tomamos el ejemplo.

- c) Si (la población aumenta) \underline{y} (la producción agrícola permanece constante) entonces (el precio de los alimentos sube)

Las expresiones atómicas son las siguientes;

E: la población aumenta

F: la producción agrícola permanece constante

G: el precio de los alimentos sube

Entonces la proposición lógica queda como, $Si (E \text{ y } F) \text{ entonces } G$

- d) Finalmente, en la expresión matemática;

$Si (x + y = 6 \text{ y } y = 3) \text{ entonces } (x = 3)$

Las proposiciones atómicas son:

H: $x + y = 6$

K: $y = 3$

L: $x = 3$

Así, esta última expresión sería $Si (H \text{ y } K) \text{ entonces } L$

Como se puede notar, una característica de las proposiciones moleculares es el hecho de que no solo están formadas por proposiciones atómicas sino además por un término que las enlazan. El uso de paréntesis sirve para imponer prioridad. Primero se realizan las operaciones entre paréntesis y después se evalúa la expresión final a partir de estos resultados parciales.

1.1.2 Conectores y sus símbolos.

Los conectores lógicos, como se indica, marcan la forma como se relacionan o enlazan las proposiciones atómicas. Su valor de verdad dependerá de cada una de cada uno de sus componentes.

Estos conectores son binarios; es decir, enlazan dos proposiciones atómicas, excepto la negación que se verá más tarde.

Conjunción \wedge

Cuando dos proposiciones atómicas se combinan mediante el enlace “y” lógico para formar una proposición molecular, se le llama **conjunción**. El término simbólico que usaremos para la conjunción será \wedge

Así, si tenemos la proposición $P \wedge Q$, indica que es la conjunción de P y Q .

Para que una proposición como $P \wedge Q$ sea verdadera es necesario que tanto P como Q sean proposiciones verdaderas, en caso contrario es falsa.

Este resultado también se puede expresar en una tabla de verdad de la siguiente forma:

Tabla 1.1

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Donde:

1 = verdadero

0 = falso

Algunos ejemplos de conjunción son los siguientes:

1. Sean las proposiciones: P : 13 es un número primo y Q : 13 es un número impar. La proposición lógica $P \wedge Q$ indicará que 13 es un número primo y 13 es un número impar. Como ambas proposiciones moleculares son verdaderas, entonces la proposición completa será también verdadera.
2. Sea P la proposición: María es hermana de Luis y Q la proposición: estas notas son de química. La proposición de conjunción $P \wedge Q$ será; María es hermana de Luis y estas notas son de química. Como la segunda proposición es falsa, toda la proposición será también falsa.

Disjunción (\vee)

Cuando dos proposiciones atómicas se enlazan por medio del conectivo lógico "o", forman una proposición molecular que se llama **disjunción**. El término simbólico que usaremos será \vee . Esta nueva proposición tomará un valor verdadero si alguna de las proposiciones atómicas o las dos son verdaderas, en otro caso será falsa.

Si tenemos el siguiente enunciado "compramos boletos para el concierto o tendremos que conseguir un pase". Podemos enumerar las proposiciones atómicas de la siguiente forma:

P : Compra boleto para el partido.

Q : solicitar pase

Tabla 1.2

P	R	$P \vee R$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Negación (\neg)

Es el único caso especial que le permite actuar sobre una sola proposición molecular o atómica y su función es negar la proposición. Esto significa que, si alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador de negación, se obtiene su complemento o negación (falso).

Tabla 1.3

P	$\neg P$
1	0
0	1

1.1.3 Proposición condicional. (\rightarrow)

Si en una proposición usamos las palabras **Si ... Entonces**, la proposición molecular que resulta es una proposición condicional. La vamos a representar en términos lógicos de la siguiente forma:

$$P \rightarrow Q \quad \text{Se lee "Si } p \text{ entonces } q\text{"}$$

La proposición después del **Si**, es el antecedente, hipótesis o condición suficiente y la que precede al **Entonces**, se llama consecuente o condición necesaria del condicional.

Las proposiciones condicionales son falsas cuando el antecedente (P) es verdadero y el consecuente (Q) sea falso. Es decir, cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa.

Ejemplo. Si aumentamos la producción del petróleo entonces el precio baja.

Sean las proposiciones lógicas

P : aumentamos la producción de petróleo

Q : el precio baja

La tabla de verdad queda de la siguiente manera:

Tabla 1.4

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Esta tabla se lee así,

- 1) Antecedente y consecuente verdadero. Los precios bajan como consecuencia de la hipótesis de aumento de la producción.
- 2) La producción puede aumentar, y eso no garantiza que el precio baje. La hipótesis entonces es falsa porque no provocó una baja en el precio
- 3) El antecedente es falso y los precios suben. El hecho de que no aumente la producción y los precios bajan no hace falsa la proposición condicional y si no la hace falsa entonces es verdadera.
- 4) Si el antecedente y el consecuente son falsos, similar al anterior. Si la hipótesis no se verifica y los precios no bajan, la proposición es verdadera.

1.1.4 Proposición bicondicional. (\leftrightarrow)

Sean p y q dos proposiciones entonces se puede indicar la proposición bicondicional de la siguiente manera:

$$P \leftrightarrow Q \quad \text{Se lee "P si y solo si Q"}$$

Esto significa que P es verdadera si y solo si Q es también verdadera. O bien P es falsa si y solo si Q también lo es. Ejemplo; el enunciado siguiente es una proposición bicondicional

En una sociedad capitalista, "la economía crece, si y solo si crecen los mercados"

Dónde:

P: La economía crece.

Q: crecen los mercados.

Por lo tanto, su tabla de verdad es.

Tabla 1.5

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La proposición condicional solamente es verdadera si tanto p como q son falsas o bien ambas verdaderas

A partir de este momento, ya se está en condiciones de representar cualquier enunciado con conectores lógicos.

Ejemplo. Sea el siguiente enunciado “Si no pago la luz, entonces me cortarán la corriente eléctrica. Y Si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Y Si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si solo sí, soy desorganizado”

Dónde:

P: Pago la luz.

Q: Me cortarán la corriente eléctrica.

R: Me quedo sin dinero.

S: Pido prestado.

T: Pagar la deuda.

W: soy desorganizado.

$$(\neg P \rightarrow Q) \wedge [P \rightarrow (R \vee S)] \wedge [(R \wedge S) \rightarrow \neg T] \leftrightarrow W$$

1.1.5 Tablas de verdad.

En estos momentos ya se está en condiciones de elaborar cualquier tabla de verdad. A continuación, se presenta un ejemplo para la proposición.

$$[(P \rightarrow Q) \vee ((Q \wedge R))] \leftrightarrow (R \rightarrow Q)$$

Tabla 1.6

<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$(\neg Q \wedge R)$	$(P \rightarrow Q) \vee (\neg Q \wedge R)$	$R \rightarrow Q$	$[(P \rightarrow Q) \vee (\neg Q \wedge R)] \leftrightarrow (R \rightarrow Q)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

El número de líneas de la tabla de verdad depende del número de variables de la expresión y se puede calcular por medio de la siguiente fórmula.

$$\text{No. de líneas} = 2^n \quad \text{Donde } n = \text{número de variables distintas}^6.$$

⁶ Esta pequeña fórmula que a simple vista parece insignificante, es el llamado conjunto potencia, que entre otras cosas nos dice cuántos subconjuntos tiene un conjunto

1.1.6 Tautología

Tautología, es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es la contra positiva, cuya tabla de verdad se indica a continuación.

Tabla 1.7

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Note que en las tautologías para todos los valores de verdad el resultado de la proposición es siempre 1. Las tautologías son muy importantes en lógica matemática ya que se consideran leyes en las cuales nos podemos apoyar para realizar demostraciones. A continuación, se presenta una lista de las tautologías más conocidas y las reglas de inferencia de mayor uso en las demostraciones formales.

- | | |
|---|--|
| a) $\neg\neg p$ se deduce p | Doble Negación |
| b) $(p \vee q)$ se deduce $(q \vee p)$
$(p \wedge q)$ se deduce $(q \wedge p)$
$(p \leftrightarrow q)$ se deduce $(q \leftrightarrow p)$ | Leyes conmutativas. |
| c) $[(p \vee q) \vee r]$ se deduce $[p \vee (q \vee r)]$
$[(p \wedge q) \wedge r]$ se deduce $[p \wedge (q \wedge r)]$ | Leyes asociativas. |
| d) $[p \vee (q \wedge r)]$ se deduce $[(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
$[p \wedge (q \vee r)]$ se deduce $[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
$(p \vee p)$ se deduce p
$(p \wedge p)$ se deduce p | Leyes distributivas.
Leyes de idempotencia. |
| e) $\neg(p \vee q)$ se deduce $(\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \wedge q)$ se deduce $(\neg p \vee \neg q)$
$(p \vee q)$ se deduce $\neg(\neg p \wedge \neg q)$
$(p \wedge q)$ se deduce $\neg(\neg p \vee \neg q)$ | Leyes de De Morgan |
| f) $(p \rightarrow q)$ se deduce $(\neg q \rightarrow \neg p)$ | Contra positiva. |
| g) $(p \rightarrow q)$ se deduce $(\neg p \vee q)$
$(p \rightarrow q)$ se deduce $\neg(p \wedge \neg q)$
$(p \vee q)$ se deduce $\neg(p \rightarrow \neg q)$
$(p \wedge q)$ se deduce $\neg(p \rightarrow \neg q)$
$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$ se deduce $[(p \wedge q) \rightarrow r]$
$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$ se deduce $[p \rightarrow (q \wedge r)]$ | Implicación. |
| h) $(p \leftrightarrow q)$ se deduce $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ | Equivalencia |

1.1.7 Contradicción.

Es aquella proposición que siempre es falsa para todos los valores de verdad, una de las más usadas y más sencilla es $p \wedge \neg p$. Como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

Tabla 1.8

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	0
1	0	0

Si en el ejemplo anterior

p : La inflación es baja.

La proposición $p \wedge \neg p$ equivale a decir que “La inflación es baja y la inflación no es baja”. Por lo tanto, se está contradiciendo o se dice que es una **falacia**.

Una proposición compuesta cuyos resultados, en sus diferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado 1s y 0s se le llama **contingente**.

1.1.8 Equivalencia lógica (\equiv).

Son proposiciones bicondicionales. Usted puede entrar al teatro, si y solo si, tiene boleto. Si las dos proposiciones son verdaderas, entonces la proposición bicondicional es cierta. Se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente **equivalentes**. Si coinciden sus resultados para los mismos valores de verdad. Se indican como $p \in q$ o bien $p \leftrightarrow q$, se lee como p es equivalente a q y viceversa.

En el ejemplo de la tautología, que se propuso antes, se puede observar que las columnas de $(p \rightarrow q)$ y $(\neg q \rightarrow \neg p)$ tienen los mismos valores de verdad, por lo tanto; podemos afirmar que;

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \quad \text{son equivalentes.}$$

Ejemplo. Utilizar una tabla de verdad para comprobar la equivalencia lógica de las proposiciones $A \wedge \neg B$ y $\neg(\neg A \vee B)$

Tabla 1.9

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \vee B$	$\neg(\neg A \vee B)$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

Si comparamos las columnas 5 y 7 tienen los mismos valores de verdad; por lo tanto, son equivalentes.

Las proposiciones equivalentes siempre son una tautología, el valor de certeza de ambas y su bicondicional serán siempre verdaderas. Esta característica permite identificar estas proposiciones como tautológicamente equivalentes.

La equivalencia lógica tiene tres propiedades básicas;

1. Reflexividad. Toda proposición es lógicamente equivalente a sí misma.
2. Simetría. Si $A \equiv B$, entonces $B \equiv A$.
3. Transitividad. Si $A \equiv B$ y $B \equiv C$, entonces $A \equiv C$

1.1.9 Cuantificadores

Como ya hemos visto, una proposición es una característica $[q(x)]$ que queremos que cumpla "cierto objeto" x , constantemente encontraremos o necesitaremos objetos que cumplan una propiedad, como n es un número impar, o necesitamos que nuestro ingreso sea mayor que cero, para decir que todos los objetos con los que trabajamos cumplen la propiedad que necesitamos, es necesario emplear un cuantificador.

Las siguientes proposiciones,

- *Cada estudiante de la Facultad de Economía es parte de la comunidad de la UNAM.*
- *Un estudiante de matemáticas es parte de la comunidad de la Facultad de Economía.*
- *Por lo tanto, el estudiante de matemática de la Facultad de Economía es miembro de la comunidad de la UNAM.*

Si llamamos a "X un estudiante de matemáticas" y "S de la Facultad de Economía", " $p(x)$ la comunidad de la UNAM".

Decimos que, $\forall x \in S, q(x)$ i.e. para todo x que pertenece o es elemento de S , x tiene la propiedad $p(x)$. \forall es el cuantificador universal para todo. Que se lee, "para todo estudiante de matemáticas de la Facultad de Economía se cumple que es parte de la comunidad de la UNAM".

En caso de que esa propiedad sea falsa, diremos que por lo menos hay un elemento en S que no tiene dicha propiedad:

$$\forall x \in S, \neg p(x)$$

La proposición matemática siguiente,

$$\{\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\}$$

Es una proposición verdadera, porque es válida para cualquier valor de x en los Reales. Por lo contrario, la proposición matemática,

$$\{\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x - 1 = 5\}$$

Es una proposición falsa, porque no es válida para cualquier valor de x en los Reales.

Ejercicios.

1. Escriba las proposiciones lógicas para los enunciados siguientes.
 - 1.1 Si estudio en la UNAM, entonces no estudio en una Universidad privada.
 - 1.2 Si un estudiante toma el metro para ir al colegio, llega temprano a clase. Si viene en motocicleta llega temprano a clase. Entonces si toma el metro o viene en motocicleta, llega a clase temprano
 - 1.3 Si llovió ayer, entonces no riego las flores. Si no llovió entonces riego las flores
2. Use la tabla de verdad para demostrar lo siguiente
 - 2.1 $(p \vee q) \rightarrow q$
 - 2.2 $(p \wedge q) \rightarrow q$
 - 2.3 $(p \vee q) \wedge p \leftrightarrow q$
 - 2.4 $(p \wedge q) \vee q \leftrightarrow p$
 - 2.5 $\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$
 - 2.6 $p \rightarrow (q \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \rightarrow r$
3. Escriba la negación de las siguientes expresiones.
 - 3.1 $\bar{A} \wedge B$
 - 3.2 $\bar{A} \vee B$
 - 3.3 $A \vee (B \wedge C)$
 - 3.4 $A \wedge (B \vee C)$
 - 3.5 $\overline{A \vee B} \rightarrow R$
 - 3.6 $A \vee B \rightarrow \bar{C}$
4. Complete la tabla de verdad y demuestre lo siguiente,
 - 4.1 Conmutatividad de $P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Las columnas de verdad de las dos expresiones son las mismas.

- 4.2 Asociatividad de $P \vee Q \vee R$

P	Q	R	$P \vee Q$	$Q \vee R$	$(P \vee Q) \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

4.3 Distributividad

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Las columnas de verdad de las expresiones son iguales, por lo tanto, son equivalentes.

5. Construya la tabla de verdad y analice si son equivalentes

5.1 $(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q)$

5.2 $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

5.3 $(p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow \neg q)$

5.4 $\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

5.5 $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

6. Demostrar que las siguientes expresiones son equivalentes

6.1 $\neg p \wedge q \equiv \neg(p \vee \neg q)$

6.2 $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

6.3 $p \rightarrow q \equiv p \vee \neg q$

6.4 $p \rightarrow \neg p \wedge q \equiv p \vee \neg q \rightarrow \neg p$

7. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones:

7.1 $\forall x \in A \mid x + 5 = 10$

7.2 $x \in A \mid x > 5$

7.3 $x \in A \mid x^2 - 3x = -2$

8. Utilice una tabla de verdad para demostrar que la expresión, $R = \bar{P} \rightarrow (P \rightarrow Q)$ es una tautología.

*Cada cuerpo tiene en otros
su armonía y el conjunto
su desarmonía de desarmonías
produce algo mejor
que la belleza.*

*en algunos casos
la suma de armonías
puede ser casi empalagosa*

Mario Benedetti
Viento del exilio¹.

1.2 Teoría de Conjuntos

¿Cuándo surge la teoría de conjuntos? es una pregunta delicada que pareciera no tener respuesta, en realidad es difícil de establecer. El origen quizá se remonta al nacimiento del sistema numérico. Debido a que los números, en sí son conjuntos y son la base de cualquier álgebra. Sin embargo, el primer estudio formal sobre el tema fue realizado por el matemático alemán Georg Cantor⁷ en el Siglo XIX y más tarde reformulada por Ernst Zermelo⁸.

*...el producto más bello del genio matemático
y uno de los logros supremos de
la actividad humana puramente intelectual.*

David Hilbert, acerca de la obra de Cantor⁹

Cantor, como otros matemáticos, se dieron cuenta del hecho de que el modelo de razonamiento de Euclides era insuficiente y propone la "teoría de conjuntos". Para Cantor, los conceptos de biyección, infinito y el concepto de Universo en Euclides no eran suficientemente claros, por lo que introduce conceptos originales para tratar el infinito.

⁷ **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor.** Nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, Rusia, y murió el 6 de enero de 1918 en Halle, Alemania. Co creador junto a Dedekind y Frege de la teoría de conjuntos, y parte fundamental de los números reales, con sus conjuntos transfinitos. Aquejado por fuertes periodos de depresión, pasaría el final de sus días trabajando en su hipótesis Bacon-Shakespeare la cual sostenía que Francis Bacon había escrito las obras de Shakespeare, sin alejarse del todo de las matemáticas, pues continuó dictando conferencias sobre las paradojas de la teoría de conjuntos. Referencia: Prieto Castro, Carlos. Sarando vuelve al mundo de las matemáticas. FCE. México D F.

⁸ **Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo** (1871– 1953) [matemático](#) y [filósofo alemán](#). Sus trabajos matemáticos se desarrollaron sobre todo en el ámbito de la teoría de conjuntos. Su más importante contribución fue la axiomatización de la teoría de conjuntos (la primera de todas las que se han propuesto a lo largo de la historia), para la cual propuso siete axiomas: el de extensionalidad, el de conjuntos elementales, el de separación, el del conjunto-potencia, el de unión, el de elección y el de infinitud.

Referencia: sitio web "Biografías y Vidas", consultado el 07/junio/2012. URL: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/z/zermelo.htm>

⁹ Prieto Castro, Carlos. Sarando vuelve al mundo de las matemáticas. FCE. México D F

Para Cantor, los términos de: conjunto, elemento, parte, relación, etc., no están definidos; solo los utiliza. Esta falta de definición lleva a dificultades lógicas que históricamente han exigido una revisión de la teoría. Cantor fundamentó una teoría axiomática, es decir incontrovertible, que permite construir los conjuntos y posteriormente establecer el concepto de infinito. Para esto definió el concepto de "cardinalidad" o "potencia" de un conjunto. Dos conjuntos se dicen que tienen el mismo número de elementos, que tienen la misma cardinalidad o son equipotentes, si existe una función definida entre ellos de forma que a cada elemento de uno sólo le corresponde otro elemento del otro conjunto, y viceversa. Es decir, consideró que la idea de una biyección sería el principio básico para comparar conjuntos infinitos. El término de potencia de un conjunto dio paso al término de cardinal.

El concepto de conjunto es intuitivo y se podría definir como una "colección de objetos", o también se entiende por conjunto a la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o nuestra mente.

- Un **conjunto** es una colección de objetos que se ven como una globalidad.
- Es una colección de objetos bien definidos y diferenciables entre sí, que se llaman elementos del conjunto.

Algo natural en nuestras sociedades es el buscar agrupar cosas que tienen características comunes, por ejemplo;

- *Una familia, una ciudad, un país.*
- *El personal de una empresa, Universidad, u organización sindical.*
- *Empresas con más de 1000 empleados, trabajadores con un salario entre (a, b) .*

Ahora bien, las definiciones anteriores, si bien son correctas, pudieran llevarnos a ciertas paradojas, incluso si damos una definición muy precisa, como en el siguiente ejemplo.

Se cuenta que, en un lejano poblado de un antiguo emirato, había un barbero llamado As-Samet, ducho en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y poner sanguijuelas. Un día el Emir, dándose cuenta de la escasez de barberos en el emirato, dio órdenes de que todos los barberos del emirato solo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas (todas las personas en este pueblo tienen que ser afeitadas, ya sea por el barbero o por ellas mismas). Un cierto día el barbero fue llamado a afeitar al Emir y le contó a este sus congojas.

En mi pueblo soy el único barbero. Si me afeito, entonces puedo afeitarme por mí mismo y, por lo tanto, no debería afeitarme el barbero de mi pueblo ¡que soy yo! Pero si no me afeito, lo debe hacer un barbero por mí ¡pero no hay allí más barbero que yo!

El Emir pensó que tales razonamientos eran muy profundos, a tal grado que premió al barbero con la mano de la más virtuosa de sus hijas, y el barbero vivió eternamente feliz.

Este ejemplo es conocido como la paradoja de Russel¹⁰, y como nos podemos dar cuenta, definir conjuntos no es trivial, es por eso por lo que no se pueden crear conjuntos muy grandes porque eventualmente salen a relucir contradicciones lógicas. Esto nos lleva a una conclusión muy importante, **no existe el conjunto universal o conjunto de todos los conjuntos**. Cuando en determinado contexto se consideran siempre conjuntos que son partes de uno dado Ω , nombraremos a dicho Ω como **conjunto universal** o de referencia.

Notación de conjuntos

En forma general utilizamos letras mayúsculas para identificar conjuntos, como por ejemplo A, B o Colores y minúsculas para representar a sus elementos, de esta forma;

Si a es un elemento, o miembro del conjunto A se denota con la relación de pertenencia $a \in A$. En caso contrario, si a no es un elemento de A se escribe $a \notin A$.

Ejemplos de conjuntos:

- \emptyset : el conjunto vacío, es el único que carece de elementos.
- \mathbb{N} : el conjunto de los números naturales.
- \mathbb{Z} : el conjunto de los números enteros.
- \mathbb{Q} : el conjunto de los números racionales.
- \mathbb{R} : el conjunto de los números reales.
- \mathbb{C} : el conjunto de los números complejos.

Para especificar los elementos de un conjunto usamos la escritura entre llaves:

$$A = \{a, b, c, d, f, i\} \text{ o bien } L = \{a, c, b, f, d\}$$

En algunos casos podemos simplificar la escritura. Si tenemos el conjunto de las cifras 1212212 se indicará solamente así 1,2. En otros casos hacemos $S = \{0,1,2\}$ al conjunto de raíces de la ecuación cúbica $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$, donde a, b, c son tres números cualesquiera. Es importante destacar que, el orden de los elementos en un conjunto no lo modifica.

Un conjunto se puede describir por sus elementos, método de extensión, si enumeramos todos y cada uno de sus elementos; o bien por la propiedad que los caracteriza.

¹⁰ Bertrand Russell (Trelleck, 1872 - Plas Penrhyn, 1970) Filósofo y matemático británico. Además de las investigaciones de carácter lógico-matemático, Russell, en efecto, había realizado, con singular fortuna, el estudio de problemas sociales y ético-políticos, y publicado, en consecuencia, textos como Matrimonio y moral (Marriage and Morale, 1929), La conquista de la felicidad (The Conquest of Happiness, 1930) y La educación y el orden social (Education and the Social Order, 1932. En 1950 recibió el premio Nobel de Literatura. En 1955 dio a la imprenta el testamento espiritual de Albert Einstein, y se manifestó abiertamente en favor de la prohibición de la guerra atómica y de los conflictos bélicos en general. Referencia: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/r/russell_bertrand.htm

V. gr, sea el conjunto de los colores, que describimos por enumeración,

$$Q = \{\text{rojo}, \text{azul}, \text{naranja}, \text{amarillo}, \text{verde}\}$$

O bien, si el conjunto tiene muchos elementos se utilizan puntos suspensivos como en el caso,

$$E = \{10, 20, 30, 40, 50, \dots, 80, 90, 100\}$$

También podemos representar un conjunto por comprensión, por medio de la característica que comparten sus elementos, por ejemplo, el conjunto de los números enteros menores de 50

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 50\}$$

Que se lee, "el conjunto de las x que están en los números enteros \mathbb{Z} , tal que x es un entero menor que 50".

Ejemplos

a) $A = \{a, b, c, f, d\}$ Es un conjunto finito, compuesto por un número determinado de elementos.

$B = \{\text{números naturales pares}\} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ es par}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ Conjunto finito, compuesto por un infinito de elementos o miembros.

Decida si, de acuerdo con los ejemplos anteriores, los números siguientes son o no elementos del conjunto anterior B

a.1) 60

a.2) -20

a.3) 17

Puesto que 60 es un número natural par; entonces pertenece al conjunto B y lo escribimos como

$$60 \in B$$

Por otro lado, los números -20 y 17 , el primero no es un número natural y el segundo no es par; entonces no pertenecen al conjunto B

$$\{-20, 17\} \notin B$$

b) Explique con palabras los siguientes conjuntos,

b.1) $A = \{x \mid x + 5 \leq 15\}$

A es el conjunto de las x tal que $x + 5$ es menor o igual que 15

b.2) B es el conjunto de todos los valores de x que está en los números naturales positivos pares.

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par}\}$$

b.3) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 10\}$

C es el conjunto de las x que están en los números reales tal que x es mayor 3 y menor que 10.

b.4) El conjunto de los números enteros múltiplos de cinco

$$x \in \mathbb{Z} \mid x * 5$$

1.2.1 Subconjuntos

Se dice que A está contenido en B (o que A es un **subconjunto** de B o que A es una parte de B), y se escribe $A \subset B$, si todo elemento de A lo es también de B , es decir, si $a \in A$ entonces $a \in B$.

Ejemplos.

- a) Sea A el conjunto de los venados, y sea B el conjunto de los seres del reino animal. En este caso es evidente que $A \subset B$ y que $B \not\subset A$.
- b) Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$ y $C = \{2,4,8\}$. Explicar si se cumplen las siguientes expresiones; $B \subset A$, $C \subset A$, $B \not\subset C$, $C \not\subset B$, $A \not\subset B$ y $A \not\subset C$
 - $B \subset A$, verdadero los elementos de $B = \{1,3,5,7\}$ están incluidos en A , $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, por lo tanto, B es un subconjunto de A
 - $C \subset A$, verdadero el mismo caso anterior. Todos los elementos de C están en A , C es un subconjunto de A .
 - $B \not\subset C$, verdadero los elementos de B no están en C , por lo tanto, B no es un subconjunto de C
 - $C \not\subset B$, verdadero la misma situación anterior.
 - $A \not\subset B$ verdadero, A tiene elementos no contenidos en B .
 - $A \not\subset C$, verdadero mismo caso anterior
- c) Supongamos un conjunto cualquiera C , definido por enumeración de sus elementos $C = \{1,2,3,4, a, b, c\}$

Si A es el conjunto $A = \{3,4, a\}$ y $B = \{1,2,5, f, g\}$

Decimos que A es un subconjunto de C si cada elemento de A está contenido en C , como se demuestra. En el caso del conjunto B , no todos sus elementos están incluidos en C ; por lo tanto, no es un subconjunto de C . Esto lo podemos escribir,

$$A \subset C \quad \text{y} \quad B \not\subset C \quad \text{o bien} \\ \{3,4, a\} \subset \{1,2,3,4, a, b, c\} \quad \text{y} \quad \{1,2,5, f, g\} \not\subset \{1,2,3,4, a, b, c\}$$

El conjunto vacío \emptyset , es subconjunto de cualquier conjunto.

¿Cuántos subconjuntos se pueden formar del conjunto de los colores $\{\text{azul}, \text{verde}, \text{rojo}\}$?

De un elemento serían $\{\text{azul}\}, \{\text{verde}\}, \{\text{rojo}\}$

De dos elementos $\{\text{azul}, \text{verde}\}, \{\text{verde}, \text{rojo}\}, \{\text{azul}, \text{rojo}\}$

Es decir, se podrían formar 8 subconjuntos, los seis anteriores más el mismo conjunto $\{\text{azul}, \text{verde}, \text{rojo}\}$ y el conjunto vacío \emptyset . A estos últimos se les llama subconjuntos propios del conjunto original.

Finalmente, un conjunto vacío \emptyset no tiene subconjunto propio.

1.2.2 Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos A y B se dicen iguales, se denota $A = B$, si ambos conjuntos tienen los mismos elementos (o también la misma propiedad característica), no importa el orden ni el número de elementos,

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Sean los conjuntos $A := \{a, b, c, f, d\}$ y el conjunto $B := \{b, c, f, d, a\}$ $A = B$
 $C := \{1, 2, 3, 4\}$ $D := \{2, 2, 1, 1, 3, 4\}$ $C = D$
 $E := \{a, b, 1, 2\}$ $F := \{2, a, a, a, 1, 2\}$ $E = F$

Lo anterior nos dice, que dados dos conjuntos A y B ; si estos son iguales, entonces simultáneamente $A \subset B$ y $B \subset A$. El primero está incluido en el segundo y viceversa.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

La igualdad de conjuntos cumple con las siguientes leyes,

- 1) Es Reflexiva. Todo conjunto es igual a sí mismo. $A = A$
- 2) Simetría. Si $A = B \rightarrow B = A$
- 3) Transitiva, dados tres conjuntos si $A = B \wedge B = C \rightarrow A = C$

Ejercicios:

1. Enliste la familia de los números naturales que son múltiplos de 5 y menores que 27.
2. Sea $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ el conjunto de números naturales primos. (Un número primo es aquel que es divisible solamente por la unidad y por el mismo). Indique cuáles de los siguientes números pertenecen a P .
 $11, 111, 1111, 1111, 37, 27$
3. Sea $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{2, 4, 6, 8\}$ y $C := \{3, 6, 9\}$. Enliste los elementos tales que:
 - 3.1 Pertenecen a los conjuntos A y a B .
 - 3.2 Pertenecen a el conjunto A y al conjunto B
 - 3.3 Pertenecen a los tres conjuntos A , B y C .
4. Sean los conjuntos; $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $B = \{c, d, e\}$ y $C = \{f, g, h\}$. Verificar si se cumple que $C \subset A$ y $C \subset B$
5. Para los siguientes conjuntos indique si la expresión es verdadera o falsa.
 - 5.1. $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{e, d, c, b\}$ se cumple que $B \subset A$
 - 5.2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{e, d, c, b\}$ se cumple que $B \not\subset A$
 - 5.3. $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ se cumple que $B \subset A$
 - 5.4. $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{e, d, c, b\}$ se cumple que $B \subset A$
 - 5.5. $A = \{a, b, c, d, e\}$ y B . Escriba un caso del conjunto B tal que se cumpla que $B \subset A$ y un ejemplo de conjunto B que verifique que $B \not\subset A$

1.2.3 Conjunto potencia

El conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto se llama **conjunto potencia**, y se escribe $\wp(A)$. De esta manera, la relación $B \subset A$ es equivalente a decir $B \subset \wp(A)$.

Ejemplos:

- 1) $\wp(\emptyset) = \emptyset$
- 2) Si $A = \{a, b\}$ entonces $\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$
- 3) Si $a \in A$ entonces $\{a\} \in \wp(A)$.
- 4) Si $B = \{a, b, c\}$ entonces $\wp(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, B\}$. El cardinal de partes de B es el número de partes; es decir $|\wp(B)| = 8$

El conjunto potencia de un conjunto cualquiera tiene siempre como elementos al conjunto vacío \emptyset y al mismo conjunto. El número de subconjuntos que tiene un conjunto de n elementos es,

$$\wp(A) = 2^n$$

1.2.4 Operaciones entre conjuntos

Se llama **unión** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por objetos que son elementos de A o de B , es decir: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$.

Sean los conjuntos $A = \{d, e, f, g\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. La unión entre estos conjuntos es,

$$A \cup B = \{d, e, f, g, 1, 2, 3\}$$

La **intersección** de dos conjuntos, que se escribe $A \cap B$, es el conjunto formado por objetos que son elementos de A y de B , es decir:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Por ejemplo, dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{d, e, f\}$ y $C = \{1, 2, 3\}$

- a) La intersección entre A y B , son los elementos en común, $A \cap B = \{d, e, f\}$
- b) El conjunto intersección entre B y C es $B \cap C = \emptyset$, no tienen elementos en común.

Los conjuntos que no tienen elementos en común, como en el caso, $B \cap C$ ó $A \cap C$, se llaman **conjuntos disjuntos**

Se llama **diferencia** entre dos conjuntos A y B al conjunto de los elementos que están en A , pero que no están en B

$$A - B = \{a \in A \mid a \notin B\}$$

Si llamamos A al conjunto de estudiantes que tienen auto, M a las estudiantes mujeres y el conjunto universal Ω es el conjunto formado por todos los estudiantes. Las diferencias,

- a) $A - M$, es el conjunto de los estudiantes que tienen auto y que no son mujeres
- b) $M - A$, será el conjunto de estudiantes mujeres que no tienen auto

Una propiedad importante de la diferencia entre conjuntos es,

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Si $A \in \wp(\Omega)$, a la diferencia $\Omega - A$ se le llama **complemento** de A respecto de Ω , y se denota en forma abreviada por A^c o \bar{A} o también A' (Ω se supone fijo de antemano). El complemento es el conjunto de todos los elementos del universo Ω que no pertenecen al conjunto, en nuestro caso A .

$$A^c = \{x \mid x \in \Omega \text{ y } x \notin A\}$$

Es fácil ver que si A y B son subconjuntos cualesquiera de Ω se verifica:

- $\emptyset^c = \Omega$
- $\Omega^c = \emptyset$
- $(A^c)^c = A$
- $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$
- Si $A = \{x \in \Omega \mid p(x) \text{ es una proposición verdadera}\}$ entonces $A^c = \{x \in \Omega \mid p(x) \text{ es una proposición falsa}\}$.

Si A y B son subconjuntos del conjunto universal Ω , entonces $A - B = A \cap B^c$. En este caso, las llamadas **operaciones booleanas** (unión e intersección) verifican las siguientes propiedades:

Leyes	Unión	Intersección
1.- Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
2.- Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
3.- Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4.- Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
5.- Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6.- Complementariedad	$A \cup A^c = \Omega$	$A \cap A^c = \emptyset$
	$C \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B$	$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$

Estas propiedades hacen que partes de Ω con las operaciones unión e intersección tengan una estructura de álgebra de Boole. Además de las anteriores, se verifican también las siguientes propiedades:

- $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$ (elemento nulo)
- $A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \Omega = A$ (elemento universal)

1.2.5 Leyes de De Morgan¹¹

Las leyes de De Morgan son especialmente útiles para demostrar la validez de un razonamiento matemático. Esta ley nos dice que, dadas dos premisas, unidas por la conjunción o la disyunción, al negarlas se obtendrá que el signo conjunción o disyunción ha cambiado.

Para cualquier pareja de A y B valen las siguientes propiedades:

- 1) La negación de la intersección de dos o más conjuntos es equivalente a la unión de la negación de los conjuntos

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

- 2) La negación de la unión de dos o más conjuntos es igual a la intersección de la negación de cada conjunto.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Para revisar estas propiedades hagamos un ejemplo. Supongamos que $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{c, d, f, g\}$ y el conjunto universal $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, realizamos lo siguiente,

La primera propiedad.

- $(A \cup B) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $(A \cup B)^c = \{h, i, j\}$
- $A^c \cap B^c = \{f, g, h, i, j\} \cap \{a, b, e, h, i, j\} = \{h, i, j\}$ que es lo que queríamos demostrar.

La segunda propiedad.

- $(A \cap B) = \{c, d\}$
- $(A \cap B)^c = \{a, b, e, f, g, h, i, j\}$
- $A^c \cup B^c = \{f, g, h, i, j\} \cup \{a, b, e, h, i, j\} = \{a, b, e, f, g, h, i, j\}$ que es lo que queríamos demostrar.

O bien con tablas de verdad, se podrían verificar estas propiedades.

Tabla 1.10

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	A^c	B^c	$(A \cap B)^c$	$A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c$	$A^c \cap B^c$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Como vemos en la tabla 1.10, las proposiciones $(A \cap B)^c$ y $A^c \cup B^c$ tienen la misma tabla de verdad, igual que para $(A \cup B)^c$ y $A^c \cap B^c$.

¹¹ Augustus De Morgan (1806 - 1871), matemático inglés nacido en la India. Formuló sus famosas Leyes de De Morgan dentro del algebra de la lógica.

1.2.6 Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A y B , en ese orden. Se define el **producto cartesiano**, o par ordenado, de ambos como el conjunto de pares ordenados:

$$A \times B := \{ (a, b) : a \in A \wedge b \in B \}$$

Es el conjunto de todas las combinaciones que se pueden formar de dos conjuntos en donde el primer elemento pertenece al conjunto A y es segundo al conjunto B .

Ejemplo. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = 2,4$ obtener los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$

$$A \times B = (a, 2), (a, 4), (b, 2), (b, 4), (c, 2), (c, 4), (d, 2), (d, 4)$$

$$B \times A = (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (4, a), (4, b), (4, c), (4, d)$$

Dos pares (a, b) y (c, d) de $A \times B$ son iguales si $a = c$ y $b = d$; análogamente, dados cuatro conjuntos A, B, C, D se verifica

$$A \times B = C \times D \Leftrightarrow (A = C \wedge B = D)$$

1.2.8 Diagramas de VENN¹²

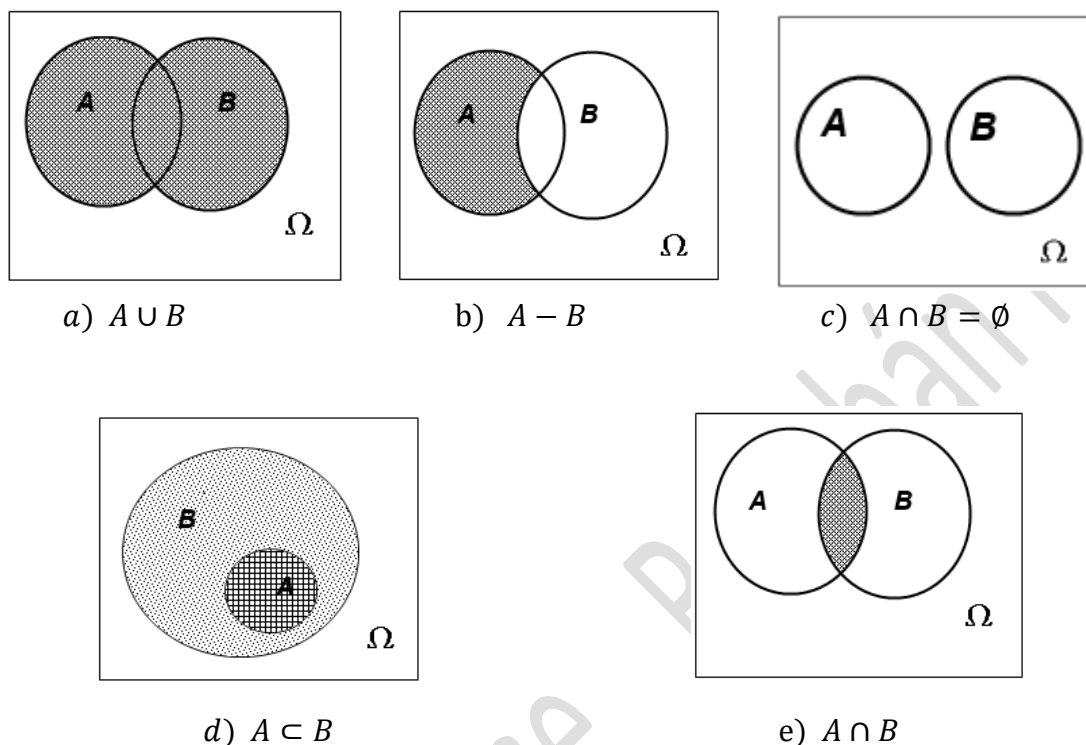
Los diagramas de Venn, o diagramas lógicos, se utilizan cuando queremos representar relaciones entre varios conjuntos y analizar cómo los elementos de varios conjuntos están relacionados en el universo, incluso si es un conjunto este vacío. Se suelen utilizar círculos para ilustrar las relaciones lógicas entre conjuntos. Las intersecciones de los círculos representan los puntos comunes, y las otras áreas de los círculos significan las diferencias.

Así, todas las operaciones entre conjuntos se pueden representar gráficamente con el fin de tener una idea más intuitiva.

En la gráfica 1.1, se muestran dos conjuntos cada uno representado por un círculo. Para ilustrar la operación, los círculos se superponen para ilustrar la operación de intersección. El área sombreada es el resultado de la operación entre los conjuntos. Si los conjuntos no tienen elementos en común, en forma gráfica serían dos círculos aislados.

¹² John Venn, matemático inglés, 1834-1923. Considerado uno de los creadores de la lógica matemática, especialmente por su método de representación gráfica llamados hoy en día, "diagramas de Venn" y que se incluyen en su obra *Lógica simbólica publicado en 1881*.

Grafica 1.1



De esta manera, en los cinco casos anteriores, el área sombreada se forma así,

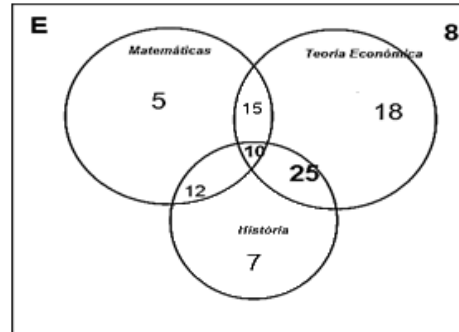
- a) $A \cup B$ representa a todos los elementos que están en el conjunto A o en B
- b) $A - B$ son los elementos que están en A y que no están en B
- c) $A \cap B = \emptyset$, el resultado es el conjunto vacío, no hay elementos en común.
- d) $A \subset B$, El conjunto A esta incluido en el círculo de B , por lo tanto, es un subconjunto de B
- e) $A \cap B$, la intersección muestra los elementos en común.

Ejemplo. Construir el diagrama de Venn para el siguiente ejercicio.

Un grupo de 100 estudiantes de Economía, cursan las siguientes materias, 42 Matemáticas, 68 Teoría Económica, 54 Historia; 22 estudiantes cursan Matemáticas e Historia y 25 Matemáticas y Teoría Económica. Además, 7 estudiantes estudian Historia, pero no Matemáticas ni Teoría Económica. Finalmente 10 estudiantes están en las tres materias y 8 de ellos en ninguna de estas asignaturas.

- a) Construya un diagrama de Venn y enumere las diferentes relaciones entre los conjuntos

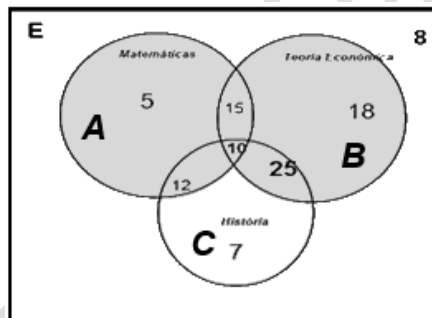
Gráfica 1.2



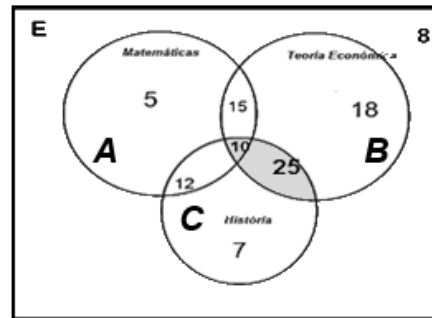
- b) Si A es el conjunto de estudiantes que cursan matemáticas, B los estudiantes de Teoría Económica y C los que estudian Historia, utilizar diagramas de Venn para representar, las relaciones que se solicitan y enumere los resultados.

$$A \cup B; B \cap C; (A \cup B)^c; C \cap (A \cup B)^c$$

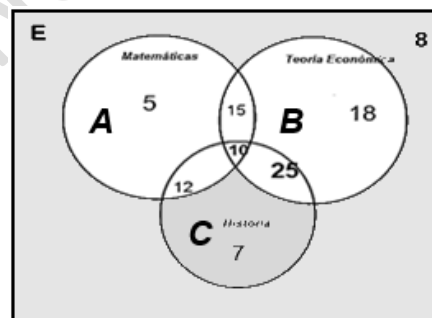
Gráfica 1.3



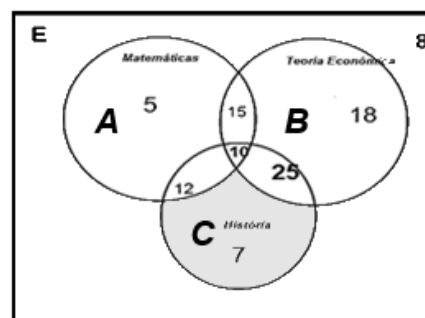
$$A \cup B = 85$$



$$B \cap C = 35$$



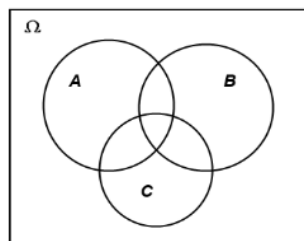
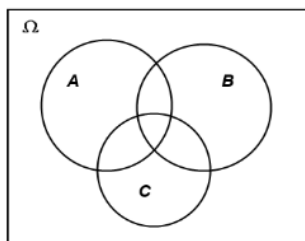
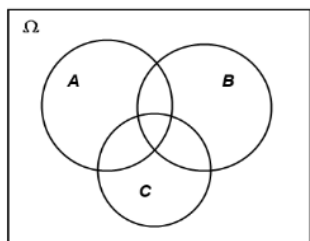
$$(A \cup B)^c = 100 - 85 = 15$$



$$C \cap (A \cup B)^c = 7$$

Ejercicios.

- Sean $A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{2,6\}$, $C = \{5,6,7,2\}$, $D = \{6,2\}$
Calcular $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup B \cup C \cup D$; $A \cap B \cap C \cap D$; $(A \cup B) \cap (C \cup D)$
- Liste por enumeración de sus elementos cada uno de los siguientes conjuntos.
 - $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 10\}$
 - $\{x \in \mathbb{R} \mid (x + 3)(x - 5) = 0\}$
- Encontrar el conjunto potencia de los siguientes conjuntos.
 - $A = \{2,4,6,8\}$
 - $B = \{a, b, c, d, e\}$
- Si A es el conjunto $A = \{2,4,6,8,19\}$, $B = \{3,6,9,12\}$ y $C = \{7,12\}$. Encontrar por enumeración de sus elementos,
 - $A \cup B$
 - $B \cup C$
 - $A \cap B$
 - $B \cap C$
 - $A \cap B \cap C$
 - $A \cup B \cup C$
 - $A - B$
 - $B - C$
 - $A - C$
 - $(A) - (B \cap C)$
 - $B - (A \cap C)$
- Dados los siguientes conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{c, d, f, g\}$ y el conjunto universal $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, demuestra lo siguiente,
 - $A = (A \cap B) \cup (A - B)$
 - $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- En el diagrama de Venn siguiente, rayar las siguientes operaciones
 - $A \cup (B \cap C)$
 - $(A \cup B) \cap (C \cup A)$
 - $(B - A) \cap (B \cup C)$



- Sea el conjunto $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ con las siguientes partes de E

$$A = \{1,2,3,4\}$$

$$B = \{4,5,6,7\}$$

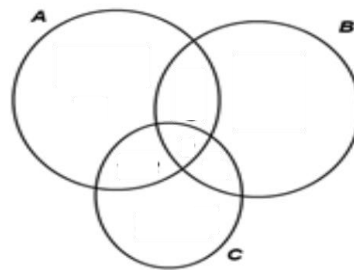
$$C = \{1,3,5,7\}$$

$$D = \{2,3,4,5,6\}$$

Calcular $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $(A \cup C) \cap (B \cup D)$ y $(A^c \cap D)^c \cap (B \cup C)^c$

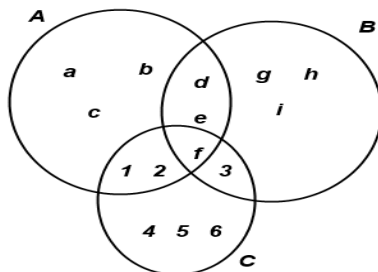
8. Sea el conjunto universal Ω , el conjunto de todos los resultados posibles de una ruleta de 24 números. Y para los siguientes subconjuntos de Ω

A = Resultados pares,
 B = Resultados menores o iguales que 10
 C = Resultados divisibles entre 3



Escriba en un diagrama de Venn estas relaciones lógicas

9. La figura siguiente muestra el diagrama de Venn de tres conjuntos, A, B y C.



Describe por enumeración los conjuntos que resultan,

- a. $A \cup B$ b. $A \cup B \cup C$ c. $B \cap C$ d. $A \cap B \cap C$
 e. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ f. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

10. En los ejercicios siguientes, utilice diagramas de Venn, para demostrar las siguientes propiedades.

- a) $A \cap B = B \cap A$ b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 ○ c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
 ○ f) $(A - B) \cap C = A \cap (C - B)$ g) $A^c - B = (A \cup B)^c$

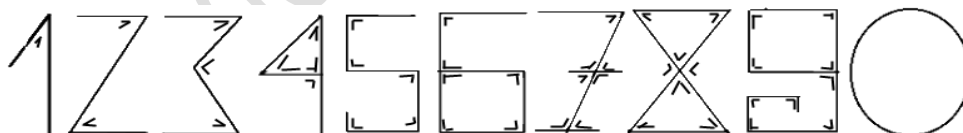
“.. considero el concepto de numérico como algo completamente independiente de las representaciones o intuiciones del espacio y del tiempo, como algo que es más bien un resultado inmediato de las puras leyes del pensamiento”.

Richard Dedekind¹³

1.3 El Sistema numérico.

¿Para qué necesitamos los números? quizá sea una pregunta simplista puesto que ya los utilizamos de una forma cotidiana. Los números nos sirven para contar, medir el tiempo como los años, el ingreso o nuestros gastos, distancias, superficies etc. Si la pregunta fuera ¿Cómo se define un número? La respuesta no sería tan simple; podríamos decir que, un número es una cifra o un dato que nos sirve para ubicar algo en un orden de cosas. La mayoría de las respuestas serían correctas, pero no nos pondríamos de acuerdo en su definición. Los números son quizá uno de los logros más importantes de la humanidad, ya que con el sistema numérico podemos medir cuánto tenemos, el tiempo transcurrido, nuestra edad, el tamaño de nuestras propiedades; sin embargo, cuando se trata de aprender el sistema numérico decimos que es aburrido, monótono, sin interés. El sistema numérico justifica toda la atención que sea necesaria ya que es la base del estudio de la matemática.

Los números, tal como los conocemos hoy en día, proceden de los utilizados por los hindúes, luego popularizados y extendidos por los árabes. Para estas culturas, la forma de los números tiene un sentido matemático. Cada número se dibuja con un número de ángulos igual al número representado. El cero, al no tener ningún ángulo, es circular.



Griegos y romanos no tuvieron una adecuada manera de representar los números; sin embargo, fueron los griegos quienes mejor apreciaron las virtudes del concepto de número. Pitágoras formó una secta, los Pitagóricos, cuya filosofía estaba basada en los números. Los hindúes, en cambio, habían desarrollado un práctico sistema de notación numeral, al descubrir el cero y el valor posicional de las cifras. Los árabes dieron a conocer el sistema en Europa a partir del Siglo VII d.C. Por esta razón, las cifras que utilizamos hoy en día se llaman indo arábicas.

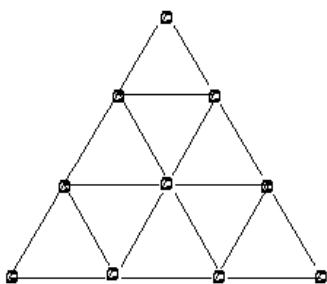
¹³ Dedekind, Richard ¿QUE SON Y PARA QUE SIRVEN LOS NÚMEROS? y otros escritos, ALIANZA EDITORIAL, Madrid, 1997.

A los Pitagóricos les emocionaban los números y dado a que eran místicos asignaban a ellos importancia y significados que ahora juzgamos infantiles.

Tenían una figura sagrada, mística, llamada tetraktys. Esta imagen representa al número 10. La importancia que le daban es tal que hacían un juramento, establecido por el propio Pitágoras. El 10 era para ellos un número perfecto, resulta de sumar $1 + 2 + 3 + 4$, los cuatro primeros números enteros, al final la suma de los dígitos del número diez $1 + 0 = 1$, es decir el regreso a la unidad. Esta operación representa la década, la totalidad del universo.

Este gráfico, tetraktys, es un triángulo de 10 puntos dispuestos en cuatro líneas, en la línea superior tiene un punto, la siguiente dos, después 3 y 4 puntos. Para los pitagóricos era un símbolo místico.

Gráfica 1.4



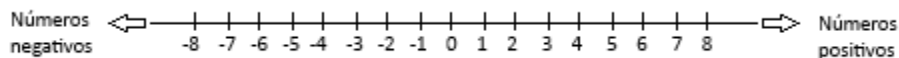
Los números significaban:

- 1 - La unidad, esencia o la naturaleza misma de la razón, el origen de todas las cosas.
- 2 - Opinión, posibilidad de opinión contraria, la dualidad.
- 3 - Los tres niveles del mundo. Los números nones representan lo masculino.
- 4 - Justicia, producto de iguales, 2×2 . Los elementos tierra, aire, fuego y agua.

1.3.1 La recta numérica

En 1859, durante su estancia en la Universidad de Zúrich, un profesor de matemáticas, Richard Julius Dedekind, con la idea de enseñar a sus estudiantes de una manera sólida y clara de los números reales, les da una interpretación geométrica en forma de línea recta.

Gráfica 1.5



La recta numérica nos sirve para ordenar los números, así podemos determinar si un número es menor que otro o si este es positivo o negativo, su valor va a depender del lugar que ocupa en la recta numérica.

“Dedekind se dio cuenta de la sucesiva extensión de una clase de números en otra clase mayor, en donde la primera clase formaba parte de la extensión. Primero, los números naturales 1, 2, 3... se extendieron a la clase de los números enteros: positivos, cero y negativos. Las operaciones matemáticas con enteros negativos podían ser expresadas en

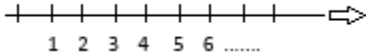
términos de números enteros. Luego los números enteros se extendieron a los números racionales, en los cuales estaban integrados”¹⁴

Este sistema numérico no era nuevo, en realidad desde la antigüedad, con los griegos, ya se conocían los números racionales y los irracionales, así como los números positivos y negativos; sin embargo, estos no se consideraban parte de los números naturales.

El sistema numérico actual cuenta con más sistemas numéricos que no inician con los números naturales, en lo que sigue vamos a describirlos.

1.3.2 Números naturales (\mathbb{N})

Los números que usamos para contar 1, 2, 3, 4, ... los llamamos números naturales, se representan mediante la letra \mathbb{N} .

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, +1\}$ En la recta numérica 

Definición: Un conjunto de números es cerrado bajo una operación, si al realizar la operación entre dos elementos cualesquiera del conjunto, el resultado es un elemento del propio conjunto.

Para los números naturales \mathbb{N} , son cerrados bajo las operaciones de suma y multiplicación, pero no lo son para la resta ni la división.

- 1) Si sumamos o multiplicamos dos números naturales cualesquiera, el resultado es un número natural.
Por ejemplo: $8 + 5 = 13$, $8 \times 5 = 40$
- 2) Si restamos o dividimos dos números naturales, el resultado no siempre es otro número natural.
Por ejemplo: $5 - 8 = -3$ $2 \div 7 = 0.285$

Propiedades

Si a , b y c son números naturales, tenemos;

- Propiedad reflexiva: $a = a$.
- Propiedad simétrica: Si $a = b$, entonces; $b = a$.
- Propiedad transitiva: Si $a = b$ y $b = c$, entonces; $a = c$.
- Principio de sustitución: Si $a = b$, cualquiera de las dos puede reemplazar a la otra en una proposición, sin alterar la verdad o falsedad.

¹⁴ Hawking Stephen, DIOS CREÓ LOS NÚMEROS. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia. 4ª impresión, Compilación y comentarios. Editorial CRITICA, Barcelona España, 2011, 1030 pp. Cfr. vid p. 782

Es importante señalar que el conjunto de los números Naturales posee tantos subconjuntos como se quiera, por ejemplo, los números pares e impares, los múltiplos de 3, de 5, los primos, etc.

Profundicemos un poco más en el subconjunto de los primos, probablemente el subconjunto más interesante e importante de los \mathbb{N} .

Un número natural es primo si es divisible únicamente por sí mismo y por la unidad, tiene exactamente dos divisores diferentes,

- a) El número uno no es primo.
- b) No se puede expresar como el producto de dos números naturales menores que él.

Ejemplos

- a. El número 11 es primo, solo es divisible entre 1 y 11.
- b. El 14 no es primo, es divisible entre 1,2,7 y 14.

Un tema recurrente en la matemática es encontrar un algoritmo que nos permita demostrar si un número es o no primo. Algunos son demasiado complicados e inoperantes. Quizá el método más creativo y útil, es el algoritmo o teorema de Fermat¹⁵, aunque no es del todo válido, por ejemplo, para números mayores o iguales a 561, por esta razón no es tema de este libro.

1.3.3 Teorema fundamental de la aritmética:

Todo número natural, excepto la unidad, es un número primo o bien, admite una descomposición en factores de números primos, puede ser expresado como producto de primos, salvo por el orden.

Como consecuencia de este teorema, obtenemos el mínimo común múltiplo, el máximo común divisor, simplificamos fracciones, etc.

El Máximo Común Divisor (MCD) de dos o más números naturales es el mayor de los factores comunes de estos números.

El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de dos números naturales es el menor de los múltiplos comunes de estos números.

¹⁵ Pierre de Fermat. Nacido en Beaumont-de-Lomagne, Francia, 1601 y falleció en Castres Francia en 1655. Se le conoció como el "Príncipe de los aficionados". Estudió leyes y su pasatiempo era la matemática, sus trabajos mas importantes son el Cálculo diferencias, antes que Newton y Leibnitz, La teoría de las probabilidades y descubrió el principio de fundamental de la geometría analítica.

Por ejemplo, factorizar el número 4500

4500	2
2250	2
1125	5
225	5
45	5
9	3
3	3
1	

Procedemos a evaluar si el número tiene mitad o tercera, y así siguiendo de primo en primo¹⁶, en este caso 4500 tiene mitad, i.e. es divisible entre 2, al dividirlo nos arroja 2250 que tiene mitad que nos da 1125¹⁷, el cual se puede dividir entre 5 y nos deja 225, que también tiene 5, 45 que también es divisible entre 5, 9 que tiene tercera, 3 que también tiene tercera y una vez que llegamos al 1 hemos terminado.

$$2 * 2 * 5 * 5 * 5 * 3 * 3 = 4500 \quad \text{o bien} \quad 2^2 * 5^3 * 3^2 = 4500$$

En forma parecida, para obtener el *MCD* y el *MCM* de dos cantidades, por ejemplo; 30 y 45. Procedemos de la siguiente forma,

Encontrar el Máximo Común Divisor *MCD*.

Encontramos los divisores, o factores, del número 30. Estos son todos los valores que al dividir el número da como resultado un número entero. Para este caso obtenemos,

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30

a) Encontramos, de forma similar, los divisores, o factores, de 45

1, 3, 5, 9, 15 y 45

b) Son divisores comunes 1, 3, 5, 15.

Finalmente, por la definición de *MCD* elegimos el mayor divisor 15. Es decir,

$$MCD(30, 45) = 15$$

El Mínimo Común Múltiplo *MCM*, en forma similar,

a) Realizamos una lista de algunos múltiplos de 30

30, 60, 90, 120, 150, ...

¹⁶ Un buen dispositivo para encontrar primos es la criba de Eratóstenes, hablaremos de ella en el anexo.

¹⁷ Ojo todo número que termine en 5 o 0 es divisible entre 5.

b) Y una lista de múltiplos para 45:

$$45, 90, 135, 180, \dots$$

Finalmente la lista de múltiplos comunes el menor es, 90 para nuestro ejemplo, de esta manera,

$$MCM(30, 45) = 90$$

Estos resultados son importantes porque nos sirven, entre otras cosas, para simplificar ecuaciones,

Por ejemplo. Simplifica $\frac{120}{180}$

$$\frac{120}{180} = \frac{2^3 * 5 * 3}{2^2 * 5 * 3^2} = \frac{2 * 2 * 2 * 5 * 3}{2 * 2 * 5 * 3 * 3} = \frac{2}{3}$$

Más adelante veremos las leyes de los exponentes, pero a simple vista saltan las siguientes leyes

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad y \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

1.3.4 Números enteros (\mathbb{Z})¹⁸

Es de notarse que con los números naturales no es posible llevar a cabo restas, la ausencia de números negativos nos restringen. Con la finalidad de superar la limitación de la sustracción, extenderemos el sistema de los números naturales al sistema de números enteros.

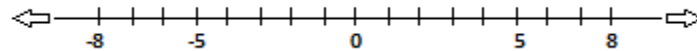
Si efectuamos la unión del conjunto que contiene $\{0\}$ ¹⁹ con el conjunto \mathbb{N} (números naturales), obtenemos el conjunto de los números enteros positivos. Al incluir un elemento aditivo inverso por cada número natural, obtenemos el conjunto de los números enteros negativos. La unión de los dos conjuntos anteriores da como resultando el conjunto de los números enteros, denotados por;

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

¹⁸ Se utiliza la letra \mathbb{Z} porque en alemán la palabra *Zahl* significa número, ya que durante los siglos XVIII y XIX matemáticos de origen alemán como Gauss, Weirtrass, Cantor, Dedekind, influyeron de manera sobresaliente en el desarrollo de la teoría de los números.

¹⁹ Para los algebristas el cero es considerado un número natural, para algunos calculistas no, dicho debate no es trivial, ya que en la construcción de los naturales el cero es fundamental, pues el primer axioma de Peano nos dice que el cero es un número natural. Nosotros por convención y practicidad, ya que este libro es para economistas, no incluimos al cero en los naturales.

Los números enteros se ordenan de menor a mayor en la recta numérica.



Además, consideramos al cero un número par.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

\mathbb{N} es un subconjunto propio de \mathbb{Z} , todo número natural es un entero, sin embargo, no todo entero es natural

Operaciones

- 1) Suma.
 - a) Para sumar dos números enteros del mismo signo, se suman sus valores y se conserva el signo.
Por ejemplo: $(+8) + (+5) = +13$, $(-8) + (-5) = -13$
 - b) Para sumar dos números enteros con signo diferente, se restan sus valores y se coloca en el resultado el signo del mayor valor.
Por ejemplo: $(+8) + (-5) = +3$, $(-8) + (+5) = -3$
- 2) Para restar dos números enteros, tenemos que sumar el valor opuesto del sustraendo.
Por ejemplo: $(+5) - (+8) = (+5) + (-8) = -3$, $(+5) - (-8) = (+5) + (+8) = 13$
- 3) Multiplicación. El producto de dos números enteros es el resultado de multiplicar los valores; si los números tienen signos iguales el resultado es un número positivo, si son diferentes el resultado tendrá signo negativo.
Por ejemplo: $(+5) * (+8) = +40$, $(-5) * (-8) = +40$, $(+5) * (-8) = -40$

Propiedades de los enteros

Si a, b y c son números enteros;

- Propiedad asociativa.
 - De la adición para toda $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b \in \mathbb{Z}$
 - De la multiplicación, para toda $a, b \in \mathbb{Z}$, $a * b \in \mathbb{Z}$
- Propiedad conmutativa.
 - De la adición para toda $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b = b + a$
 - De la multiplicación, para toda $a, b \in \mathbb{Z}$, $a * b = b * a$
- Propiedad distributiva.
Para toda $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c(a + b) = ca + cb$
- Elemento neutro.
 - De la adición para toda $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = a$
 - De la multiplicación, para toda $a \in \mathbb{Z}$, $a * 1 = a$

1.3.5 Números racionales (\mathbb{Q})²⁰

Al igual que con los números naturales, la división entre números enteros no siempre es otro entero. Para superar el problema de la división extendemos el sistema de los enteros a los **números racionales**.

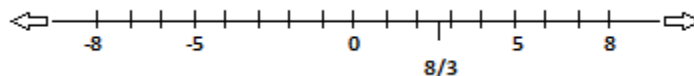
Como sabemos, la división exacta de números naturales no siempre es posible, puesto que no siempre existe un número natural que al ser multiplicado por un divisor coincida con el dividendo. Por lo tanto, nos vemos obligados a ampliar el campo numérico introduciendo las fracciones o quebrados. Algunos, también dan el nombre de números racionales.

Un número racional es aquel que puede expresarse como cociente de dos enteros. En el conjunto de los racionales están incluidos los enteros positivos y negativos, el cero y las fracciones positivas y negativas. En general, los números racionales son los que se pueden representar por medio de fracciones, de la forma $\frac{m}{n}$ donde m y n son enteros y $n \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ X = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Son números racionales $\frac{8}{3}$, $\frac{(-5)}{7}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{6}{1}$ un entero también es un número racional.

Podemos sumar, restar, multiplicar y dividir cualquier par de números racionales (excepto cero), y también los podemos representar en la recta numérica, para completar los huecos que dejan los números enteros,



Aparentemente, con estos números podemos ocupar todos los puntos de la recta numérica; sin embargo, los griegos encontraron que había muchos espacios no ocupados por los números racionales. De aquí podemos decir que hay un infinito de números racionales.

Propiedades de los racionales

- Q es cerrado bajo la suma, resta, multiplicación y división, ya que, al efectuar dichas operaciones, el resultado siempre será un número racional, incluso si este es un número entero, ya que un número entero puede ser representado como racional.
- Si varias fracciones tienen el mismo denominador es mayor la que tenga mayor numerador.
- Si varias fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador.

²⁰ Del inglés "quotient" que significa cociente, razón, proporción.

- d) Si los dos términos de una fracción se multiplican o se dividen por un mismo número, el valor de la fracción no varía.
- e) Como ya hemos señalado, la división entre cero no es una operación permitida. Sin embargo, la división de cero entre cualquier número diferente de cero sí es posible y el resultado siempre será cero.

$$i. e \frac{m}{0} \text{ no es posible y } \frac{0}{n} \text{ siempre será cero}$$

Y con los números racionales podemos efectuar operaciones como la siguiente

$$\frac{4 \div \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)}{3 + \left(2 - \frac{5}{3}\right) \left(-4 + \frac{45}{5}\right)^2}$$

Antes de empezar a resolver recordemos las prioridades, o reglas, para efectuar operaciones aritméticas.

1. Resolver paréntesis, u otros símbolos. () []
2. Resolver exponentes o raíces.
3. Multiplicación y división de izquierda a derecha.
4. Suma y resta de izquierda a derecha

Regresamos a nuestro ejemplo,

$$\frac{4 \div \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)}{3 + \left(2 - \frac{5}{3}\right) \left(-4 + \frac{45}{5}\right)^2}$$

Para evitar errores en las operaciones, recomendamos desarrollar la operación por partes.

Parte 1: $4 \div \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$

Parte 2: $3 + \left(2 - \frac{5}{3}\right) \left(-4 + \frac{45}{5}\right)^2$

Comenzaremos con la parte 1, y con el numerador de la parte superior derecha $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{2} = -1$$

Después de su resolución, procedemos a integrarlo a nuestro numerador completo

$$4 \div (-1) = 4 \div -1 = -\frac{4}{1} = -4$$

Continuaremos con la parte 2, y con el denominador (en este caso utilizaremos “ \rightarrow ” como “continuación”):

$$\left(2 - \frac{5}{3}\right), \text{ si hacemos } 2 = \frac{6}{3} \rightarrow \left(\frac{6}{3} - \frac{5}{3}\right) = \frac{6-5}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\left(-4 + \frac{45}{5}\right)^2 \rightarrow \text{ donde } -4 = -\frac{20}{5} \text{ y sumando } -\frac{20}{5} + \frac{45}{5} = \frac{45-20}{5} = \frac{25}{5} = 5, \text{ por lo tanto,} \\ \text{tenemos que } (5)^2 = 25$$

Más adelante veremos las leyes de los exponentes y cómo operan; por ahora solo diremos que, para elevar un número a una potencia, debemos multiplicar este número por sí mismo el número de veces que indica el exponente.

Después de su resolución, procedemos a integrarlo a nuestro denominador completo:

$$\text{Recordemos que } \frac{a}{b} * c = \frac{ac}{b}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)(25) = \frac{25}{3}$$

$$3 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)\left(-4 + \frac{45}{5}\right)^2 = 3 + \frac{25}{3} = \frac{34}{3}$$

$$\text{La solución de la operación es } \frac{4 + \left(\frac{1-3}{2-2}\right)}{3 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)\left(-4 + \frac{45}{5}\right)^2} = \frac{-4}{\frac{34}{3}}$$

$$-4 = -\frac{4}{1} \text{ y como } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}, \text{ tenemos como solución}$$

$$\frac{-\frac{4}{1}}{\frac{34}{3}} = -\frac{12}{34} = -\frac{6}{17}$$

Finalmente, todo número racional tiene una forma decimal, la cual es resultado de la división del numerador entre el denominador.

Por ejemplo,

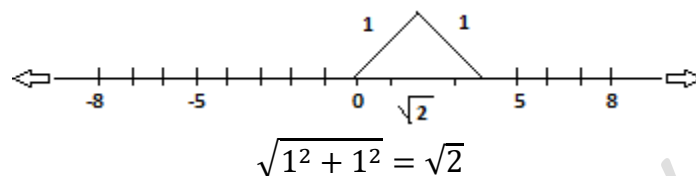
- a) $5/8=0.625$
- b) $2/3=0.666666666...$
- c) $-19/20=0.95$

1.3.6 Números irracionales (II)

No todos los números pueden ser expresados como una relación entre enteros. La Escuela Pitagórica conoció de la existencia de números irracionales, es decir, números que no eran naturales (1,2, 3, ...), ni enteros (...-3,-2,-1.0,1,2, 3, ...) ni racionales (fracciones de números enteros). Se basaron en el siguiente ejercicio;

Si se traza en la recta numérica un triángulo equilátero con lados igual a la unidad, es decir 1, y se calcula la hipotenusa utilizando el Teorema de Pitágoras²¹, como;

Gráfica 1.6



Como se puede demostrar, $\sqrt{2}$ da como resultado un número que no puede ser representado como una relación entre enteros

$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ es irreducible (no tienen divisores comunes), al elevar al cuadrado

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$$

Obtenemos; $\frac{p^2}{q^2} = 2 \rightarrow p^2 = 2q^2$

$\therefore p^2$ debe ser múltiplo de 2, lo que implica que p también es un múltiplo de 2, es decir, $p = 2m$.

Entonces

$$p^2 = 4m^2 = 2q^2 \rightarrow 2m^2 = q^2$$

Lo anterior nos dice que tanto q como p son pares, por lo tanto, tienen divisores comunes, lo cual es una contradicción, ya que p y q no tienen divisores comunes y por lo tanto $\sqrt{2}$ es irracional.

Los pitagóricos se sorprendieron mucho de la existencia de este tipo de números que contradecía su filosofía y su devoción por el número como ente perfecto que gobernaba el universo. Tanto que, se dice, acordaron mantener en secreto su descubrimiento que mostraba la fragilidad de sus creencias, pero uno de ellos lo reveló traicionando a la secta por lo que fue ejecutado.

Así, los números irracionales, son aquellos que no resultan del cociente de dos números enteros. Esta aparente fragilidad no lo es tanta ya que son necesarios para medir longitudes sobre algunas figuras geométricas: como la longitud de la hipotenusa de un triángulo de lados iguales a 1 es $\sqrt{2}$, etc. Existen infinitos números irracionales, todos ellos, junto con los racionales, forman el conjunto de los números reales.

²¹ En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa; $a^2 + b^2 = c^2$

De esta manera, entonces los números irracionales son aquellos que,

$$I = \left\{ x \neq \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Pareciera que existen más números racionales que irracionales, lo cual está equivocado.

Como ejemplos de algunos irracionales conocidos tenemos,

$$A = 1.41421356 \dots \pi = 3.14159265 \dots \text{ o bien } e^1 = 1.70997594 \dots$$

De acuerdo con la definición de número racional y la de número irracional, podemos afirmar que no existen números que sean racionales e irracionales a la vez.

Propiedades de los números irracionales

- Propiedad conmutativa: en la suma y la multiplicación se cumple la propiedad conmutativa.
Por ejemplo, $x + y = y + x$ y para la multiplicación $x * y = y * x$
- Propiedad asociativa: Las cifras se pueden agrupar de cualquier manera y el resultado no cambia.
Es el caso, $(3 + 5) + 6 = 3 + (5 + 6)$ y para la multiplicación $(5 * 3) * 2 = 5 * (3 * 2)$.
- Propiedad de no cerradura: El conjunto de los números irracionales no es cerrado bajo las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación, división o exponencial, nos puede arrojar un número no irracional.
Por ejemplo, $x = 8.325743215$, $y = 2.674256784$ son números irracionales, La suma de estos $x + y = 10.999999 \dots = 11$
- La multiplicación es distributiva en relación con la suma y la resta.
Por ejemplo: $(3 + 2)5 = 3(5) + 2(5) = 5(5)$.
- El conjunto de los irracionales es un conjunto infinito no numerables, i.e. no tiene la misma cardinalidad de \mathbb{N} .

1.3.7 Números reales (\mathbb{R})

Algunos autores afirman que los números reales son tomados en consideración en términos matemáticos con el desarrollo del cálculo. Newton y Leibniz, trabajaron ellos, sin embargo, carecían de una definición adecuada, le llamaban el infinitésimo, lo infinitamente pequeño. No obstante; esto no detuvo el desarrollo del cálculo, tuvieron que pasar dos siglos y sería Cantor quien con su aritmética de los números transfinitos, encaminaría la matemática a la definición formal de los números reales y el concepto de infinito.

Fue gracias a la revolución Cantoriana y a los trabajos de Dedekind y Weierstrass que podemos construir con rigurosidad matemática el conjunto de los números reales, ya sea por encaje de intervalos o cortaduras Dedekind²² o de manera axiomática. Creemos que dados los propósitos de este libro el método axiomático es el más adecuado.

Los números reales son la unión de los números racionales y los irracionales

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Recordemos que \mathbb{I} es no numerable y siendo este un subconjunto de \mathbb{R} , entonces \mathbb{R} es no numerable.

Propiedades de los reales

En los reales \mathbb{R} hay definidas dos operaciones, llamada suma y producto (multiplicación) y una relación de orden $<$ que se lee “es menor que”

- Para toda $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b \in \mathbb{R}$
- Para toda $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Para toda $a \in \mathbb{R}$, $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$
- Para todo $a \in \mathbb{R}$, $\exists (-a) \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$
- Para toda $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \in \mathbb{R}$
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ $ab = ba$
- Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(ab)c = a(bc)$
- Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a * 1 = a = 1 * a$
- Para toda $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a(b + c) = ab + ac$
- Para cualesquiera dos elementos $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple una y solamente una de las siguientes relaciones:
 $a < b, a = b, b < a.$
 Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$
 Si $a < b$, entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, $a + c < b + c$
 Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc.$
- Si S es un conjunto no vacío de \mathbb{R} superiormente acotado, entonces S tiene un supremo en \mathbb{R} .

²² Un aporte importante de Dedekind al sistema numérico son las cortaduras. En términos generales una cortadura, o como algunos autores llaman corte, es el hecho de que entre dos números racionales se encuentra siempre otro número racional.

Como el lector podrá notar los anteriores axiomas le son familiares, la única adición es el axioma del supremo, que es el que garantiza la densidad de la recta numérica, dicho de otra forma, que a cada número real le corresponda un punto de la recta, de lo cual se deriva la Propiedad Arquimediana²³.

Se dice que los números racionales de un lado y los irracionales del otro son “densos” en la recta numérica. Esto significa que entre dos números reales por muy juntos que se encuentren, siempre hay un racional y otro irracional.

De tal suerte que un número real es cualquier número racional o irracional. Los números reales pueden expresarse en forma decimal mediante un número entero, un decimal exacto, un decimal periódico o un decimal con infinitas cifras no periódicas.

Las fracciones numéricas que se escriben con un número finito de cifras decimales se llaman, *fracciones decimales finitas* y cuando no se pueden expresar como una fracción finita se llaman fracciones decimales infinitas.

Por ejemplo; $\frac{1}{4} = 0.25$ $\frac{93}{80} = 1.1625$ *fracciones decimales finitas.*
 $\frac{1}{6} = 0.16666..$ $\frac{4}{7} = 0.571428\ 571428 ..$ *fracciones decimales infinitas.*

Si la fracción decimal es un número racional, entonces será siempre periódica. Además, al conjunto de los números racionales pertenecen solamente los números decimales infinitos periódicos. Los decimales infinitos puros pertenecen al conjunto de los números irracionales, porque no pueden transformarse en fracción.

De esta manera, el desarrollo decimal de un número irracional no se puede transformar en fracción decimal, como;

$$\sqrt{2} = 1.414213562 \quad \text{o} \quad \pi = 3.1415926 \dots$$

En general es difícil saber si un número es racional o irracional. Por ejemplo, son irracionales $2^{\sqrt{2}}$ ó $(2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{3}})$ ambos pareciera que efectivamente son irracionales. Podría pensarse que hay más números racionales que irracionales, lo cual es falso, hay más irracionales²⁴.

Como ya lo establecimos antes, los racionales no cubren todos los puntos de la recta numérica, los irracionales completan los espacios faltantes.

²³ La Propiedad arquimediana. Para todo par de números que están en los reales, $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, existe un número entero tal que multiplicado por un real positivo el resultado siempre es mayor; es decir si $n \in \mathbb{N}$, $nx > y$

²⁴ En rigor podríamos decir que tanto los racionales como los irracionales son infinitos. Sin embargo Cantor demostró que los números racionales son numerables, los irracionales no lo son. Si los reales son la unión de racionales e irracionales, y los reales no son numerables, son mucho más los irracionales.

1.3.8 Transformar fracciones decimales en fracciones ordinarias.

Los números reales y las fracciones son simplemente dos formas distintas de mostrar el mismo valor. Nos ayudan a realizar operaciones como;

$$\frac{6}{4} + 0.25$$

Para resolver este ejercicio, podemos convertir la fracción en decimal o el número real en fracción.

Antes de presentar estas transformaciones, se precisan las siguientes definiciones.

- Los números decimales exactos terminan con una tira de ceros que no se escriben.
- Son números periódicos puros aquellos números decimales cuya parte periódica empieza inmediatamente después del punto decimal.
- Los números periódicos mixtos tienen una parte decimal no periódica.

Convertir una fracción decimal exacta a fracción ordinaria.

Se convierte el número a fracción decimal y, si se puede, se simplifica. Para transformar el número decimal a fracción ordinaria, se escribe en el numerador el número sin punto decimal, y en el denominador se utilizan potencias de diez, se colocan tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

Por ejemplo: a) $0.39 = \frac{39}{100}$ b) $0.5 = \frac{5_{\div 5}}{10_{\div 5}} = \frac{1}{2}$ c) $7.4 = \frac{74_{\div 2}}{10_{\div 2}} = \frac{37}{5}$

En los ejercicios b) y c) se reducen las fracciones al dividir numerados y denominador por el mismo factor. Luego simplificamos.

Transformación de un decimal periódico puro a fracción ordinaria.

El procedimiento es el siguiente:

- En el numerador se escribe la parte entera junto con el período, y se le resta la parte entera.
- Se escribe en el denominador tantos 9's como longitud tenga el período y de ser necesario se simplifica el resultado.

Por ejemplo: a) $0.4343 \dots = \frac{043-0}{99} = \frac{43}{99}$ b) $7.4747 \dots = \frac{747-7}{99} = \frac{740}{99}$

c) $6.2525 \dots = \frac{625-6}{99} = \frac{619}{99}$ d) $54.7171 \dots = \frac{5471-54}{99} = \frac{5417}{99}$

Transformación de un número periódico mixto a fracción ordinaria.

El procedimiento es similar al anterior:

- El numerador se obtiene similar al caso anterior, excepto que se incluye también los dígitos que no son parte del período, se resta la parte entera y los dígitos no periódicos, es decir la cantidad a la izquierda del período.
- El denominador se forma colocando tantos 9 como cifras tenga el período y tantos 0 como dígitos tenga la parte no periódica. Finalmente, el resultado se expresa como fracción irreductible o como número mixto.

Ejemplos:

2.1) 45.7231231 .. en este ejercicio el período es 231
y la no periódica 7

$$= \frac{457231 - 457}{9990} = \frac{456774}{9990 \div 6} = \frac{76129}{1665}$$

$$2.2) 45.782323 .. = \frac{457823 - 4578}{9900} = \frac{453245}{9900}$$

$$2.3) 0.72323 .. = \frac{723 - 7}{990} = \frac{716}{990 \div 2} = \frac{358}{495}$$

Ejercicios

1. Reducir las siguientes expresiones,

$$1.1 \frac{\frac{23}{8} - 15}{3} =$$

$$1.4 \frac{615 \div 13}{8 \div 3} + 19 =$$

$$1.2 \frac{6 \div \left(\frac{9}{6}\right)}{25} * \left(\frac{9}{6}\right) =$$

$$1.5 \frac{6 \div \left(\frac{9}{6}\right)}{\frac{9}{4}} \div \left(-\frac{9}{6}\right) =$$

$$1.3 \left(\frac{3 \div \left(\frac{9}{8}\right)}{\left(\frac{3}{4} \div \frac{4}{6}\right)} \div 16 \right)^3 =$$

2. Pasar de decimal exacto a fracción ordinaria

2.1 1.13

2.4 23.166

2.2 0.1769

2.5 15.142857

2.3 2234.1

3. Pasar de periódico puro a fracción ordinaria

3.1 1.131313 ..

3.2 0.17691769 ..

3.3 2.718281828459

4. Pasar de periódico mixto a fracción ordinaria

4.1 1.13333 ..

4.2 6.25651651

4.3 10.8333

1.4 Potencias y Raíces

Se llama potencia a la forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales. La base de una potencia es el número que multiplicamos por sí mismo y el exponente de una potencia indica el número de veces que multiplicamos la base; es decir

$a^n = a a a a a \dots \dots$ (Multiplicar la base "a" por si misma "n" veces).

Ejemplos. $9^3 = 9 * 9 * 9 = 729$; $(-7)^3 = (-7)(-7)(-7) = -343$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$

Si el exponente es negativo, la potencia se obtiene con su recíproco

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{125}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}$$

Propiedades de las potencias. Sean p y q números enteros positivos.

- 1) La multiplicación de potencias de la misma base se suman los exponentes.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

- 2) En la división de potencias de la misma base, se restan los exponentes.

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

- 3) La potencia de una potencia se obtiene al multiplicar los exponentes.

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

- 4) La potencia de un producto es igual al producto de las potencias

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Ejemplos. Simplificar las siguientes expresiones,

1) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

2) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)$

3) $100^0 = 1$ $(4x)^0 = 1$ $x \neq 0$

4) $-5y^0 = (-5)(1) = -5$ $y \neq 0$

5) $b^5(b) = b^{5+1} = b^6$

6) $(-2)^3(-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5$

7) $(a^2)^3 = a^{2(3)} = a^6$

8) $(ab)^4 = a^4 b^4$

9) $\frac{a^6}{a^3} = a^{6-3} = a^3$

10) $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

11) $\left(\frac{2a}{5b^2}\right)^3 = \frac{(2a)^3}{(5b^2)^3} = \frac{8a^3}{125b^6}$

Un caso especial de las potencias, son las **Raíces**. Se llama raíz enésima de un número, que se escribe como $\sqrt[n]{a} = b$ también podemos escribir como $a^{\frac{1}{n}} = b$, al número b tal que elevado a la potencia n sea igual a "a".

Como en el caso: $\sqrt{256} = 16$ en $\sqrt[3]{729} = 9$ porque $(9)(9)(9) = 729$

Si la potencia de un número es una fracción decimal, entonces $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.

Por ejemplo,

$$a) 6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3]{36} \qquad b) 216^{-1/3} = \frac{1}{216^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{216}} = \frac{1}{6}$$

Así que, un radical es un símbolo matemático que representa la raíz de un número. El radical puede estar elevado a cualquier potencia. Por ejemplo, las raíces cuadradas, cúbicas o en forma general, la raíz enésima de un número.

Las potencias y las raíces son operaciones inversas. Por ejemplo, si la raíz de un número lo elevamos a la misma potencia se anulan y obtendremos como resultado el mismo número. Esto se demuestra en las siguientes propiedades.,

Propiedades de las raíces.

- 1) La raíz de un producto es igual al producto de las raíces.

$$\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a} \sqrt[p]{b}$$

- 2) También, la raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces.

$$\sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$$

- 3) Si multiplicamos el índice de una raíz y el exponente del radicando por un mismo valor, el resultado no se altera

$$\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[np]{a^{nq}}$$

- 4) Si una raíz se eleva a un exponente, se eleva el radical a ese exponente

$$\left(\sqrt[p]{a^q}\right)^n = \left(a^{\frac{q}{p}}\right)^n = a^{\frac{nq}{p}} = \sqrt[p]{a^{nq}}$$

- 5) Si La raíz de una potencia con el mismo exponente; es decir, si la raíz es igual al radicando

$$\sqrt[p]{a^p} = a$$

- 6) La raíz de una raíz es igual a la multiplicación de las raíces

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}$$

- 7) Para introducir un factor dentro de una raíz se mueve el factor al radical elevado a la potencia de la raíz y multiplica a todos los otros elementos.

$$a^p \sqrt[p]{b^q} = \sqrt[p]{a^p b^q}$$

Finalmente, si el exponente del radical y el del radicando son iguales, se debe respetar lo siguiente:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & \text{si } n \text{ es } \text{non} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \\ |x|, & \text{si } n \text{ es } \text{par}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejemplos de factorización con raíces.

- a) $\sqrt[3]{189}$ Factorizar 189, por los valores $7 * 27$

$\sqrt[3]{7 * 27}$ Ahora factorizamos 27 como 3^3

$\sqrt[3]{7 * 3^3}$ aplicamos la regla 1 y nos queda

$$\sqrt[3]{189} = \sqrt[3]{7 * 27} = \sqrt[3]{7 * 3^3} = \sqrt[3]{7} \sqrt[3]{3^3} = 3 \sqrt[3]{7}$$

- b) $\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{8 * 216} = \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{216} = 2 (6) = 12$

- c) $\frac{3}{\sqrt[5]{3}}$ Factorizar para reducir la raíz del denominador con $(\sqrt[5]{3})^4$

$\frac{3 (\sqrt[5]{3})^4}{\sqrt[5]{3} (\sqrt[5]{3})^4}$ De esta manera nos permite reducir así,

$$\frac{3 (\sqrt[5]{3})^4}{\sqrt[5]{3} (\sqrt[5]{3})^4} = \frac{3 (\sqrt[5]{3})^4}{(\sqrt[5]{3})^5} = \frac{3 \sqrt[5]{3^4}}{3^5} = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$$

- d) $\frac{5}{3\sqrt{x}}$ multiplicamos y dividimos por el mismo factor \sqrt{x} el resultado no se altera

$$\frac{5\sqrt{x}}{3\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{5\sqrt{x}}{3(x^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}})} = \frac{5\sqrt{x}}{3x}$$

- e) $\sqrt[3]{\frac{27}{512}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{3}{8}$

- f) $\sqrt[6]{4^9} = \sqrt[2]{4^3}$ se dividen radical y exponente $\div 3$

- g) $\sqrt[6]{3} \sqrt[4]{27} = \sqrt[6(2)]{3^2} \sqrt[4(3)]{27^3} = \sqrt[12]{3^2} \sqrt[12]{27^3} = \sqrt[12]{3^2 27^3} = \sqrt[12]{3^2 (3^3)^3} = \sqrt[12]{3^2 3^9} = \sqrt[12]{3^{11}}$

- h) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{75}} = \frac{\sqrt[3(2)]{5^2}}{\sqrt[6]{75}} = \sqrt[6]{\frac{25}{75}} = \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$

i) Eliminar el radical del denominador.

$$a. \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$b. \frac{3}{7\sqrt[3]{x^2}} \text{ multiplicamos y dividimos por el factor } \sqrt[3]{x^{3-2}} = \sqrt[3]{x}$$

$$\frac{3}{7\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{x}}{7\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x}}{7\sqrt[3]{x^2x}} = \frac{3\sqrt[3]{x}}{7\sqrt[3]{x^3}} = \frac{3\sqrt[3]{x}}{7x}$$

$$j) \frac{3}{2+\sqrt{3}} \text{ multiplicamos y dividimos por el conjugado}^{25} 2 - \sqrt{3}$$

$$\frac{3}{2+\sqrt{3}} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{6-3\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{6-3\sqrt{3}}{4-3} = 6-3\sqrt{3}$$

Ejercicios.

1. Dados los siguientes conjuntos, $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{b, d, g\}$; $C = \{a, e, g\}$, utilizar notación de conjuntos, escriba las operaciones que se solicitan

- El conjunto de elementos que pertenece a A, o son elementos de B, o que son elementos de ambos A y B.
- El conjunto de elementos que están en A y en B
- El conjunto de elementos que están en A, B y C
- El conjunto de elementos de A pero que no están en B
- El conjunto de elementos de A pero que no están en C

2. Dibuje los diagramas de VENN que correspondan a los problemas del ejercicio anterior

3. De una encuesta realizada a 135 estudiantes para conocer el medio de transporte que utilizan para ir a su escuela, metro M, autobús B y auto A; se obtuvieron los siguientes resultados: El 54% utilizan M o B, y el 26% ambos medios de transporte. El 65% utilizan B o A, y 5% se transportan en autobús y auto. El 80% utilizan Metro o Auto y el 10% las dos formas de transporte metro y auto. El 12% no utiliza ninguno de estos medios de transporte. A) Calcular el porcentaje de estudiantes que solo utiliza un medio de transporte. B) Determine el porcentaje de estudiantes que utilizan los tres medios de transporte.

4. Simplifique tanto como sea posible.

$$a) 12 - 3(6 - 9) + 2$$

$$b) (3 + 5)[6 - (4 + 3)]$$

$$c) \frac{3}{5} - \frac{1}{3}$$

$$d) \frac{2 + \frac{3}{4}}{5}$$

²⁵ Para obtener el conjugado de dos términos, de un binomio, se cambia el signo entre los dos términos. Si el término es $a + bx$ el conjugado es $a - bx$

$$e) 3 + \frac{7}{1-\frac{2}{3}}$$

$$f) \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}$$

5. Convertir las siguientes fracciones decimales a fracciones ordinarias.

a) 543.259259259.....

b) 1.719191919

c) 3.25

d) 3.25252525

e) 1.6532323232

f) 1212.345454545

6. Encuentre el valor de la variable en las siguientes ecuaciones

a) $|x - 5| = 2$

b) $|5 - 3x| = 8$

c) $|x + 7| = 3$

d) $\left|\frac{x}{6}\right| > 3$

e) $\left|\frac{x}{3}\right| > \frac{4}{3}$

f) $\left|\frac{2x-6}{2}\right| \geq 4$

7. Resolver para encontrar el valor de x de las siguientes inecuaciones y represente el resultado en la recta real.

a) $\frac{2x-1}{x+5} > 2$

b) $3x + 6 > 2x + 12$

c) $2(x + 1) - 3(x - 2) < x + 6$

d) $\frac{x+2}{3} + \frac{x-3}{2} \geq 5$

e) $\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3} \geq \frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}$

f) $4 - \frac{x-15}{3} < 8 + x$

g) $\frac{x+6}{3} - x + 6 \leq \frac{x}{15}$

h) $1 - \frac{x-5}{9} < 9 + x$

8. Dos empresas de servicio de taxis A y B, cobran por cada trayecto de acuerdo con el siguiente modelo. La empresa A cobra \$15 pesos de "banderazo" y 2.5 por kilómetro, mientras que la empresa B cobra \$17 pesos y 2.25 por cada kilómetro. Si una persona va a realizar un viaje, a partir de que kilometraje le conviene utilizar la tarifa de la empresa B.

9. Una organización de productores elabora un producto artesanal que tiene un precio unitario de venta de \$200 pesos y un costo unitario de \$150. Si los costos fijos son de \$450,000 pesos. Determine el número mínimo de productos que la organización debe producir para obtener alguna utilidad.

10. Evalúe las siguientes expresiones.

a) $81^{1/2} =$

b) $27^{1/3} =$

c) $625^{1/4} =$

d) $32^{1/5} =$

e) $\sqrt[3]{81} =$

f) $\left(-\frac{27}{8}\right)^{2/3} =$

$$g) \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \quad h) (32)^{-7/5} =$$

11. Simplifique las siguientes expresiones

$$a) \left(\frac{27b^6}{8a^{-9}}\right)^{2/3} =$$

$$b) \left(\frac{t^{4/3}u^{-3}}{t^{-1}u^{1/9}}\right)^{-3} =$$

$$c) \frac{(10^{1-r})^r}{(1000^r)^{r+1}} * \frac{10000^{r^2+2}}{100^{3-r}} =$$

$$d) \left(\frac{x^{1/3}y^{4/3}}{z^{2/3}}\right)^3 =$$

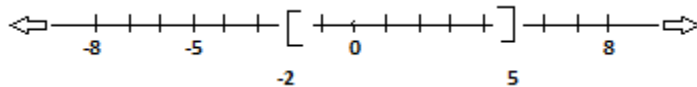
$$e) \sqrt[3]{x^4y^5} =$$

$$f) \left(\frac{x^3}{y^4}\right)^5 =$$

1.5 Intervalos

Si a y b son dos números de la recta numérica, el conjunto de números que están entre a y b se llama intervalo. Es decir, un subconjunto de la recta numérica. Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales x tal que $x > 6$, se puede escribir como el conjunto de todas las x 's tales que $-2 \leq x \leq 5$.

Gráfica 1.7



El conjunto de todos los números reales distintos de cero no es un intervalo; recuerde que el intervalo es un continuo y el cero es parte de los reales. Si no lo incluye no puede ser un intervalo.

Geoméricamente, los intervalos corresponden a segmentos o partes de la recta numérica a lo largo de la misma. Los intervalos de números que corresponden a segmentos bien definidos de la recta son intervalos finitos; los intervalos que corresponden a partes de la recta real en las que sus valores extremos no están acotados son intervalos infinitos.

Por ejemplo, el conjunto de todos los puntos que son menores o iguales a 5 y mayores o iguales a 3, es un intervalo finito. Los podemos escribir más precisamente en notación matemática como $[3,5]$. Por otro lado, el conjunto de todos los números igual o mayores que 10, lo podemos representar como $[10, \infty)$.

- Decimos que un intervalo es cerrado si incluye los valores en sus dos extremos, ejemplo $[5,3]$;
- Semiabierto si incluye uno de sus extremos, pero no el otro, como $[10, \infty)$ y
- Abierto si no incluye ninguno de sus extremos, como $(9, \infty)$.

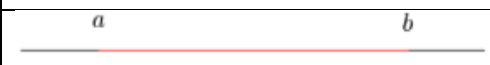
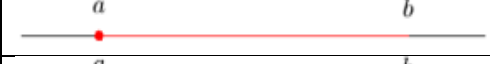
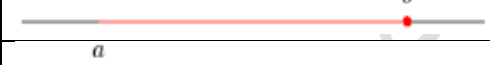


Los extremos también se llaman puntos frontera, ya que conforman precisamente la frontera del intervalo. El resto de los puntos del intervalo son puntos interiores, y constituyen el interior del intervalo. El intervalo infinito puede ser cerrado si contienen su extremo finito, de lo contrario es abierto. La recta real completa es un intervalo infinito que es tanto abierto como cerrado.

En notación de conjuntos:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ o bien } (a, b) = \{x: a < x < b\}$$

Tabla 1.10

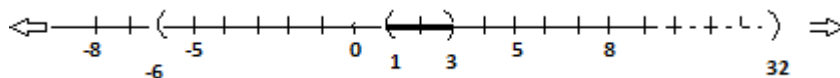
Notación	En la recta real	Intervalo de todas las x 's que incluye.
(a, b)		$a < x < b$, Intervalo abierto
$[a, b]$		$a \leq x \leq b$, Intervalo cerrado
$[a, b)$		$a \leq x < b$, Intervalo semiabierto
$(a, b]$		$a < x \leq b$, Intervalo semiabierto
$[a, \infty)$		$x \geq a$, No acotado
$(-\infty, b)$		$x < b$, No acotado

Si se aplican las operaciones de conjuntos podemos hablar de uniones o intersecciones entre intervalos.

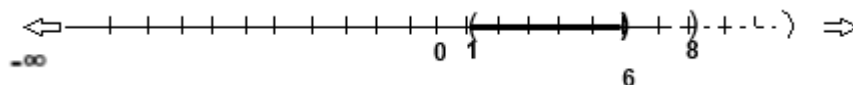
De esta manera, dados dos intervalos cualesquiera A y B, los valores reales que pertenecen a los dos intervalos se llama intersección. Por otro lado, los valores reales que pertenecen a el intervalo A o al intervalo B es la unión de los intervalos, usamos la misma notación del algebra de conjuntos para señalar estas operaciones.

Ejemplos:

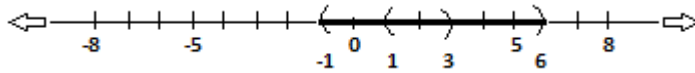
a) Encontrar $(-6, 3) \cap (1, 8] = (1, 3)$



b) Encontrar $(-\infty, 6] \cap (1, 8) = [1, 6]$



$$c) \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 6\}$$

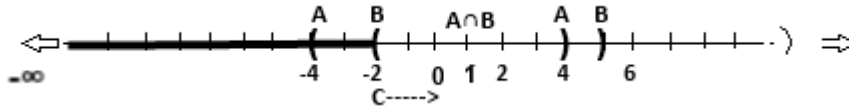


$$d) \text{ Dados los conjuntos } A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 4\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 6\} \text{ y } C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x\}. \text{ Encontrar } C^c - (A \cap B)$$

C^c = Valores que no están en C , $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \geq x\}$

$(A \cap B)$ Valores que están en A y en B $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$

$C^c - (A \cap B)$ valores que están en C^c pero no en $(A \cap B)$



Ejercicios

1. Calcular las uniones de los siguientes intervalos

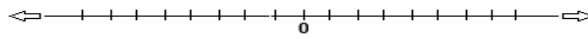
- 1.1. $[1,7) \cup [-2,5)$
- 1.2. $[1,7) \cup [2,5)$
- 1.3. $[1,7) \cup [-2, +\infty)$
- 1.4. $(3,6] \cup (-\infty, 5]$
- 1.5. $(-25,16] \cup (-\infty, 2]$

2. Calcular las intersecciones de los siguientes intervalos

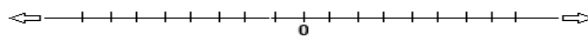
- 2.1. $[1,7) \cap [-2,5)$
- 2.2. $[1,7) \cap [2,5)$
- 2.3. $[1,7) \cap [-2, +\infty)$
- 2.4. $(3,6] \cap (-\infty, 5]$
- 2.5. $(-25,16] \cap (-\infty, 2]$

3. Representar en el plano de los reales y después obtenga la respuesta.

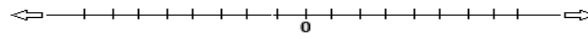
3.1. $[-4,8] \cap [-3,4]$



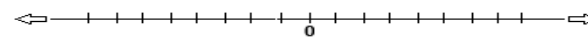
3.2. $[3,4] \cap [1,2]$



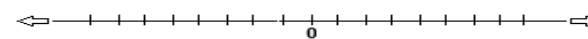
3.3. $[-6,6] \cap [3,4]$



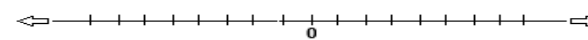
3.4. $[3,4] \cap [1,2]$



3.5. $[-3,5] \cup [0,2] \cup [1,5]$



3.6. $[-5,3] \cap [-4,6] \cap [-1,1]$



4. Demuestre que:

4.1. si $g \in [5,6]$ entonces $3g + 12 \in [27,30]$

1.6 Valor Absoluto

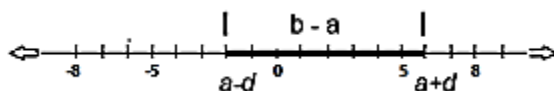
La distancia, no negativa, en la recta real entre 0 y un número real a es el valor absoluto de a , que se escribe $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Además, la distancia entre dos puntos de la recta real a, b es,

$$d(a, b) = |b - a|$$

Si representamos esta medida en la recta real se vería así;



Entonces, el valor absoluto es,

$$|13| = 13 \quad \text{y} \quad |-13| = -(-13) = 13$$

Ejemplos,

a) Para $|x - 2|$ calcular el valor absoluto cuando $x = -3, 0, 4$

$$\begin{array}{l} \text{Si } x = -3 \quad |(-3) - 2| = |-5| = 5 \\ x = 0 \quad |0 - 2| = |-2| = 2 \\ x = 4 \quad |4 - 2| = |2| = 2 \end{array}$$

b) Resolver la siguiente ecuación $|6x - 2| = x + 3$

En este ejercicio, no tenemos información del lado izquierdo de la igualdad, para encontrar el valor de x , la solución deberá considerar los casos cuando, $6x - 2 \geq 0$ y para $6x - 2 < 0$.

Cuando $6x - 2 \geq 0$, obtenemos $|6x - 2| = x + 3$

Así, $6x - 2 = x + 3 \rightarrow 5x = 5$ por lo tanto, podemos deducir que $x = 1$.

Y por otra parte, $6x - 2 < 0$

$$|6x - 2| = x + 3 \rightarrow -(6x - 2) = x + 3 \rightarrow -7x = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{7}$$

La solución es entonces $x = 1$ o $x = -\frac{1}{7}$

c) Resolver la ecuación. $|2x + \sqrt{8}| = 6$

En forma similar al caso anterior tendremos dos soluciones

Cuando $2x + \sqrt{2 * 4} = 6$ despejamos $2x = 6 - 2\sqrt{2}$ así, $x = 3 - \sqrt{2}$

El segundo caso, cuando $-(2x + \sqrt{2 * 4}) = 6$ despejamos y nos queda,

$-2x = 6 + 2\sqrt{2}$ de donde, $x = -\frac{6+2\sqrt{2}}{2}$ y finalmente $x = -(3 + \sqrt{2})$

Propiedades del valor absoluto

- 1) $|a| = |-a| = \sqrt{a^2} \geq 0$
- 2) $|ab| = |a| |b|$
- 3) $-|a| \leq a \leq |a|$
- 4) $|a^n| = |a|^n$, donde n es un número entero positivo mayor o igual que cero.
- 5) $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$
- 6) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
- 7) Desigualdad del triángulo $|a + b| \leq |a| + |b|$.
Tiene este nombre ya que; la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo

Ejemplos. Para ilustrar estas propiedades, y el manejo de los signos

- a) $|-4 - 17| + |15 - 2| = |-21| + |13| = -(-21) + 13 = 34$
- b) $-|-3(6 - 1)| + |-5| = -|-15| + 5 = -(-(-15)) + 5 = -10$

Por la propiedad 1, $|a| = |-a|$

Ejercicios.

1. $|-3 - 16| + |-4 + 9| =$
2. $-|-(3 - 16)| + |-1 - 5| =$
3. $|-2 + 16| - |-3| + |-(2 + 6) - 1| =$
4. $|-16| - |-3| + |5 - 9| - |-12| =$
5. $2|4 - 13| + 5|-1 + 6| =$
6. $3|4| - 5|-3| + 2|-(4 + 5 - 9) - 2|-6| =$
7. $6|2(3 - 16) - 3|-5 + (-3 + 4)| =$
8. $|2|-5| - 3|-7| - 4|9| + |-8| =$
9. $|-2 * 4| + 5|-6| + |2(-3)||4 - 9| =$
10. $|-3|^2 + |-2 + 5||3| =$
11. $|-2|^3 + 3|(-4 + 3)^2| =$
12. $|2(5 - 1)|^2 + 4|-1 + (3 - 6)^3| =$
13. $|-3|^2 + |-2 + 5||3| =$
14. $\left| \frac{12}{5} \right|^2 + 4 \frac{|3|}{|12|} =$
15. $2 \left| 4 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right| + |3^3| =$

1.7 Ecuaciones.

Antes de explicar las desigualdades o inecuaciones, debemos revisar el significado de igualdad. El signo de igualdad ($=$) se emplea para unir dos expresiones, cuando ambas son los nombres o descripciones del mismo objeto.

$$a = b$$

Significa que a y b son dos nombres del mismo objeto, en términos aritméticos que tienen el mismo valor.

Naturalmente $a \neq b$, significa que a no es igual a b . Si dos expresiones algebraicas con una o más variables se unen mediante el signo igual, la forma obtenida recibe el nombre de ecuación algebraica.

Una ecuación es una igualdad matemática compuesta de varias constantes o valores y al menos una incógnita, es un enigma, pero un enigma matemático, lo que significa que las incógnitas son variables. Resolver esta ecuación es encontrar el valor o valores de la variable que dan solución a la misma.

Para una ecuación como, $3x - 2 = 4$, llamamos a x la variable desconocida. Entonces en la ecuación anterior debemos encontrar el valor de x que iguala el lado izquierdo con el derecho de la ecuación. Si reemplazamos x con el valor de 2, obtenemos

$$3(2) - 2 = 4$$

Lo que verifica la ecuación; entonces, 2 es una solución.

Reglas de las ecuaciones

Si una ecuación es verdadera, entonces las siguientes reglas pueden aplicarse y la ecuación resultante también será verdadera.

- 1) Si sumamos o restamos un mismo número a las dos partes de la ecuación, la solución no cambia.
- 2) Si se multiplica o divide las dos partes de la ecuación por un mismo número, la solución no cambia.

Estas reglas suponen que, para funciones inyectivas²⁶, para cada valor de $x \neq 0$ se obtiene un resultado diferente.

²⁶ Una función es inyectiva, si a cada valor de la variable independiente le corresponde un valor diferente de la variable dependiente

Ejemplo, utilizar las reglas anteriores para resolver las siguientes ecuaciones,

a) $5x - 2 = 4x + 3$

$$5x - 2 + 2 = 4x + 3 + 2 \quad \text{regla 1}$$

$$5x - 4x = 4x + 5 - 4x \quad \text{finalmente}$$

$$x = 5$$

b) $\frac{2x+3}{-2} = \frac{2}{7}$

$$(-2) \left(\frac{2x+3}{-2} \right) = \left(\frac{2}{7} \right) (-2) \quad \text{regla 2}$$

$$2x + 3 = -\frac{4}{7}$$

$$(2x + 3)(7) = -\frac{4}{7}(7) \quad \text{regla 2}$$

$$14x + 21 = -4$$

$$14x + 21 - 21 = -4 - 21 \quad \text{regla 1}$$

$$14x = -25$$

$$14x \left(\frac{1}{14} \right) = -25 \left(\frac{1}{14} \right) \quad \text{finalmente}$$

$$x = -\frac{25}{14}$$

Cuando una ecuación es o puede ser representada como el producto de dos factores de la forma,

$$(ax + b)(bx + c) = 0$$

La solución a estas ecuaciones son los valores de x tales que,

$$ax + b = 0 \quad \text{y} \quad bx + c = 0$$

De esta forma, dada la expresión, $(2x - 8)(3x + 6) = 0$, los valores de x que son solución.

$$2x - 8 = 0, \quad \text{asi} \quad x = 4 \quad \text{por otro lado}$$

$$3x + 6 = 0, \quad x = -6$$

La ecuación tiene dos soluciones; cuando x toma los valores de 4 y -6, se satisface la ecuación.

1.8 Desigualdades o inecuaciones

Una desigualdad, llamada también inecuación, es una expresión matemática con la característica de que ciertos conjuntos de números son menores, mayores y/o iguales a una cantidad dada. Al proceso de encontrar un intervalo o intervalos de números que satisfagan una desigualdad en x se le conoce como **resolución de desigualdades o inecuaciones**.

Las **inecuaciones** nos ayudan a estudiar la naturaleza de algunas funciones; como para determinar el dominio y los signos de las funciones. Mas adelante, en el capítulo de programación lineal, podremos estudiar estas expresiones y serán de gran utilidad para resolver problemas de toma de decisiones en las que se busca encontrar la solución óptima para un problema, como podría ser la alternativa económica a un problema de producción de una empresa.

La solución de una desigualdad es un valor tal que hace que la inecuación sea verdadera. Es decir, el conjunto de valores que debe tomar la variable de interés, x 's, para que se cumpla la desigualdad. La solución en la mayoría de los casos está en un intervalo, en la unión de intervalos o que no tenga solución y en algunos casos podría estar en un solo punto.

Por ejemplo, si tenemos la inecuación $2x + 4 > 12$. Los valores de x que verifican la inecuación son, por ejemplo, 5, 6,7, etc. Así,

$$\begin{array}{ll} x = 5 & 2(5) + 4 > 12 \rightarrow 14 > 12 \\ x = 6 & 2(6) + 4 > 12 \rightarrow 16 > 12 \\ x = 7 & 2(7) + 4 > 12 \rightarrow 18 > 12 \\ x = 3 & 2(3) + 5 > 12 \rightarrow 11 > 12 \text{ no es una solución de la ecuación} \end{array}$$

Una inecuación puede tener como solución un infinito de valores. Se acostumbra a escribir al conjunto solución, como $x > 4$ o que la solución está en el intervalo no acotado $(4, \infty)$. En este caso, no se incluye el valor de $x = 4$, porque tendríamos $12 > 12$, que no es verdadera.

Algunos ejemplos de inecuaciones son los siguientes;

- a) $2x - 1 < x + 3$
- b) $3(x - 1) \leq -2(x - 6)$
- c) $-\frac{x}{3} < 2x + 1$
- d) $3x + 7 \geq 5x - 1$
- e) $|6 - 4x| > 2x + 5$
- f) $\frac{3x-1}{2} \geq x + 1$
- g) $\frac{4x-3}{2} \geq \frac{x-1}{3} + 1$

Estas inecuaciones se llaman *desigualdades lineales*. Son las más simples ya que sólo contienen variables elevadas a la primera potencia. Para resolver estas inecuaciones aplicamos las siguientes reglas.

Reglas de las desigualdades

- a) Si sumamos el mismo número a ambos lados de la desigualdad, sin importar el signo, la dirección de esta no se altera. Es decir, si $A > B$ y $C > 0$, entonces $A + C > B + C$.
- b) Si multiplicamos ambos lados de la desigualdad por un número positivo, la dirección de esta no se altera. Es decir, si $A > B$ y $C > 0$, entonces $AC > BC$.
- c) Si multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por un número negativo, la dirección de esta se invierte. Es decir, si $A > B$ y $C < 0$, entonces $AC < BC$.

Para la solución de estos ejercicios, nos vamos a apoyar en una tabla, en donde por renglones tendremos los pasos a seguir para resolver una desigualdad lineal, recuerde que la solución es un conjunto de valores que pertenecen a un intervalo de soluciones.

Ecuación		Resultado
a) $2x - 1 < x + 3$		
$2x - 1 + 1 < x + 3 + 1$	Sumar 1 en ambos lados de la desigualdad	$2x < x + 4$
$2x - x < x + 4 - x$	Restar x en ambos lados de la desigualdad	$x < 4$
$x < 4$	El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, 4)$.	
b) $3(x - 1) \leq -2(x - 6)$		
$3x - 3 \leq -2x + 12$	Quitar paréntesis	
$3x - 3 + 3 \leq -2x + 12 + 3$	Sumar 3 a ambos lados	$3x \leq -2x + 15$
$3x + 2x \leq -2x + 2x + 15$	Sumar $2x$ en ambos lados de la desigualdad	$5x \leq 15$
$\frac{5x}{5} \leq \frac{15}{5}$	Dividir entre 5 ambos lados	$x \leq 3$
$x \leq 3$	El conjunto solución es el intervalo semiabierto $(-\infty, 3]$	
c) $-\frac{x}{3} < 2x + 1$		
$3\left(-\frac{x}{3}\right) < 3(2x + 1)$	Multiplicar por 3 ambos lados de la desigualdad	$-x < 6x + 3$
$x - x < 6x + 3 + x$	Sumar x en ambos lados de la desigualdad	$0 < 7x + 3$

$0 - 3 < 7x + 3 - 3$	Restar 3 en ambos lados de la desigualdad	$-3 < 7x$
$\frac{-3}{7} < \frac{7}{7x}$	Dividir entre 7 ambos lados de la desigualdad	$\frac{-3}{7} < x$
$\frac{-3}{7} < x$	El conjunto solución es el intervalo abierto $(\frac{-3}{7}, \infty)$	
d) $3x + 7 \geq 5x - 1$		
$3x + 7 - 5x \geq 5x - 1 - 5x$	Restar 5x en ambos lados de la desigualdad.	$-2x + 7 > 1$
$-2x + 7 - 7 \geq -1 - 7$	Restar 7 en ambos lados de la desigualdad.	$-2x > 8$
$-2x \geq -8$	Dividir entre (-2) ambos lados de la desigualdad	$x \geq 4$
$x \geq 4$	El conjunto solución es el intervalo semiabierto $(-\infty, 4]$.	
e) $6 - 4x > 2x + 5$	El valor absoluto obliga a encontrar dos soluciones	
$6 - 4x > 2x + 5$	Primera solución	
$6 - 5 - 4x > 2x + 5 - 5$	Sumar -5 en ambos lados de La desigualdad	$1 - 4x > 2x$
$1 - 4x + 4x > 2x + 4x$	Sumar 4x en ambos lados	$1 > 6x$
$x < \frac{1}{6}$	El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, \frac{1}{6})$	
$-(6 - 4x) > 2x + 5$	Segunda solución	
$-6 + 4x - 5 > 2x + 5 - 5$	Sumar -5 en ambos lados	$-11 + 4x > 2x$
$-11 + 4x - 4x > 2x - 4x$	Restar 4x en ambos lados	$-11 > 2x$
$(-1)(-11) > (-2x)(-1)$	Multiplicar por -1 ambos lados, se invierte el sentido de la desigualdad	$11 < 2x$
$x > \frac{11}{2}$	El conjunto solución es el intervalo abierto $(\frac{11}{2}, \infty)$	
f) $\frac{4x-3}{2} \geq \frac{x-\frac{1}{2}}{3} + 1$		
$2\left(\frac{4x-3}{2}\right) \geq 2\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{3} + 1\right)$	Multiplicar inecuación por 2	$4x - 3 \geq \frac{2x-1}{3} + 2$
$3(4x-3) \geq 3\left(\frac{2x-1}{3} + 2\right)$	Multiplicar resultado por 3,	$12x - 9 \geq 2x - 1 + 6$

$12x - 9 + 9 \geq 2x - 1 + 6 + 9$	Sumar +9 en ambos lados	$12x \geq 2x + 14$
$12x - 2x \geq 2x + 14 - 2x$	Restar $2x$ de ambos lados y simplificar	$10x \geq 14$
$\frac{10x}{10} \geq \frac{14}{10}$	Dividir entre 10 ambos lados	$x \geq \frac{14}{10}$
$x \geq \frac{14}{10}$	El conjunto solución es el intervalo semiabierto $[\frac{14}{10}, \infty)$	

- g) El costo total de producción de x unidades de un cierto artículo está dado por la ecuación $C = 31,000 + 50x$ y cada unidad se vende en \$75. El fabricante quiere saber cuántas unidades deberá producir y vender para obtener una utilidad igual o mayor (de al menos) \$25,000 pesos.

Solución. Suponga que se producen y venden x unidades. El ingreso I obtenido por vender x unidades en \$75 pesos cada una es $I = 75x$ pesos. La utilidad U , en pesos, obtenida por producir y vender x unidades está dada entonces;

$$\begin{aligned} \text{Utilidad} &= \text{Ingresos} - \text{Costos} \\ U &= 75x - (31000 + 50x) = 25x - 31000 \end{aligned}$$

Dado que la utilidad debe ser al menos de \$25,000 pesos; es decir, deberá ser de \$25,000 pesos o más, entonces tendremos que:

$$U \geq 25,000$$

Sustituimos el valor de U , $25x - 31,000 \geq 25,000$

Esta es una desigualdad que al resolverla tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Sumamos } 31,000 \text{ en ambos lados de la ecuación} & \quad 25x \geq 56,000 \\ \text{Dividir entre } 25 \text{ cada lado de la ecuación} & \quad x \geq 2,240 \end{aligned}$$

En consecuencia, el fabricante deberá producir y vender al menos 2,240 unidades cada mes.

- h) Una organización cafetalera produce un tipo de café que tiene un precio de venta al distribuidor de \$35 pesos por kilo y un costo de producción de cada kilo de café de \$24 pesos por kilo. Si sus costos fijos son de \$35,400 pesos, ¿cuál es el mínimo de kilogramos de café que deberá vender la organización para obtener utilidades?

Solución. Sean q = kilos de café

$$\text{Ingresos totales} = 35q$$

$$\text{Costo total} = 24q + 35,400$$

De esta manera, la utilidad está dada por la siguiente ecuación,

$$U = 35q - (24q + 35,400)$$

El mínimo de café que deberá producir y vender la organización para obtener utilidades es el valor que hace que la utilidad sea mayor que cero. Así, la inecuación quedaría de la siguiente forma,

$$35q - (24q + 35,400) > 0$$

Despejamos el valor de q , de acuerdo con las reglas anteriormente vistas,

$$35q - 24q - 35400 > 0$$

$$11q > 35400$$

$$q > \frac{35400}{11} \rightarrow q > 3218.18$$

Por lo tanto, la organización deberá vender al menos 3,218 kilos de café para tener utilidades

Ejercicios

1. Resolver las siguientes desigualdades.

1.1. $2x + 8 < x - 4$

1.2. $-7 \geq 6x + 9$

1.3. $5x + 2 > 15$

1.4. $3x - 7 \leq 4x + 3$

1.5. $8x + 3 < x - 2$

1.6. $3x + 7 > x - 2$

1.7. $2x - 1 < 2x + 7$

1.8. $3x + 1 < 2x + 7$

1.9. $7x - 7 < 2x + 3$

1.10. $4x + 3 > 8$

1.11. $3(2x - 3) \geq 3 + 2((x + 4) - x + 1)$

2. Una organización de productores agrícolas cuenta con una camioneta que puede transportar 2300 kg de trigo, cuando el tanque de gasolina está lleno. La organización necesita transportar sacos de 100 kg de trigo.

i. Escribir una ecuación de desigualdad que nos ayude a determinar el número máximo de sacos que se pueden transportar, si el chofer pesa 90 kg.

ii. Calcular el número de sacos que se pueden transportar en un viaje.

Notas de Clase R. Urbán R

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de vello se cubrieron sus mejillas. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de la vida de su padre, pereció de una muerte desgraciada”²⁷

1.9 Polinomios

En la ciencia económica se requiere relacionar diferentes variables como la demanda que es función del precio de un bien y las cantidades o la función de oferta que relaciona la cantidad de producto que ofrece el productor y su precio de venta. Ambas se pueden expresar como una función lineal y sabemos que el punto de intersección entre ellas es el punto de equilibrio.

La solución a este tipo de ecuaciones lineales no es reciente. Los babilónicos y los egipcios, 2000 años A.C., resuelven problemas lineales parecidos a los que encontramos hoy en día. Incluso muchos años antes, 4000 A. C, los babilónicos ya resolvían ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas.

Diofanto de Alejandría²⁸, llamado por muchos *“El padre del álgebra”*, escribió *Arithmetica*, el trabajo más importante sobre álgebra de toda la matemática griega, la importancia de su obra reside en sus avances en notación matemática y en el tratamiento de fracciones como números, crea los signos de multiplicación, de sustracción y resuelve ecuaciones cuadráticas. Diofanto en la introducción de su obra promete una obra de 13 libros, solo seis de ellos eran conocidos, con la quema de la biblioteca de Alejandría, la obra de Diofanto sobrevivió gracias a un manuscrito copiado en Alejandría por Michelle Psellus.

Muchos años después, en el siglo IX, el matemático árabe Al-Jwârizmî²⁹ (de su nombre procede la palabra algoritmo, y el título de su libro³⁰ de álgebra, *al-jabr*, es el origen de la palabra álgebra) desarrolló el álgebra de los polinomios, es considerado con Diofanto *“El padre del álgebra”*. En su libro, *al-jabr* es un método que permite eliminar cantidades negativas de una ecuación sumando la misma cantidad a ambos lados. Al-Jwârizmî, afirmaba que los problemas matemáticos difíciles se podían resolver si se dividían en partes más pequeñas.

²⁷ https://es.wikipedia.org/wiki/Diofanto_de_Alejandría

²⁸ Clifford A. Pickover, *El libro de las matemáticas, De Pitágoras a la 57^o dimensión*, 250 hitos de la historia de las matemáticas. Editorial LIBRERO, 2018, Madrid España

²⁹ Su nombre completo es Abu Abdallah Muḥammad ibn Mūsā al-Jwârizmî, mejor conocido como Al-Jwârizmî.

³⁰ *Kitab al-mukhtasar fi al-jabr wa' l-muqabala*

Un polinomio puede ser definido, en forma general, como la suma de uno o más términos algebraicos cuyas variables tienen exponentes enteros positivos. Los polinomios se dividen en: polinomios con una variable y polinomios con varias variables.

Empezaremos por definir un monomio de una variable; es un número, una variable o el producto de un número por una variable. Es entonces, una expresión algebraica de la forma ax^k donde a es el coeficiente, x una variable elevada a una potencia k .

Ejemplos

- | | |
|------------------------------|------------------------|
| a) $3x^4$ | es un <i>monomio</i> |
| b) $2x^3 + 5x^2$ | es un <i>binomio</i> |
| c) $3x^2 + 2x + 3$ | es un <i>trinomio</i> |
| d) $ax^3 + bx + cx^4 - dx^2$ | es un <i>polinomio</i> |

En general, cuando una expresión algebraica contiene más de un *monomio* es un *polinomio*, como en los dos últimos ejemplos anteriores.

Así, una función polinómica es una suma de monomios³¹ y el grado del polinomio será el coeficiente de la potencia mayor, en el caso de una variable. Cuando trabajamos con polinomios de varias variables, el grado del polinomio será el valor mayor de la suma de los coeficientes de cada monomio.

Por ejemplo,

- | | |
|--|------------------------------------|
| a) ax^3 | es un <i>monomio de grado 3</i> |
| b) ax^3y^2z | es un <i>monomio de grado 5,</i> |
| c) $ax^2y^2 + 2xy^2z^2$ | <i>Es un binomio de grado 5</i> |
| d) $ax^2y^3 + bxy^2z^2 + 3z^6$ | <i>Es un trinomio de grado 6</i> |
| e) $ax^3y^2z + bxyz^2 + cx^3y^3z^6 - dx^4y^5z$ | <i>Es un polinomio de grado 12</i> |

Una función polinómica se forma al asignar una letra, que le da el nombre a la función, y entre paréntesis la variable o variables del polinomio.

Por ejemplo,

- | |
|--|
| a) $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ |
| b) $Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3$ |
| c) $T(x) = (2x^2 + 1)(3x - 2)$ |

³¹ O de operación de resta, que se puede expresar como una suma, $3x^2 - x^5$ es equivalente a $3x^2 + (-x^5)$. Lo que se excluye es la división.

Para encontrar el grado del polinomio del ejemplo c) tendríamos que desagregar la expresión, esta operación la veremos más adelante.

Se acostumbra a escribir las funciones polinómicas, de manera que los monomios se ordenen, dependiendo del grado del exponente, de mayor a menor, sin que esto sea una regla, de manera que el ejemplo a) se escribiría,

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Para una mejor claridad, en principio utilizaremos monomios de una sola variable. De esta manera evitaremos monomios de la forma $4x^3y^2$ o bien $ax^5y^2z^3$, de dos y tres variables respectivamente.

1.8.1 Evaluación de un polinomio

Sea la función polinómica siguiente;

$$Q(x) = 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$

Si reemplazamos x por el valor de 2 tendremos

$$\begin{aligned} Q(2) &= 5 * 2^3 + 2 * 2^2 + 4 * 2 + 1 \\ &= 5 * 8 + 2 * 4 + 8 + 1 \\ &= 40 + 8 + 8 + 1 = 57 \end{aligned}$$

Decimos que hemos reemplazado x por el valor de 2, o que 57 es el valor numérico del polinomio cuando $x = 2$. Incluso podemos presentar diferentes valores del polinomio en una tabla.

x	2	4	6	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{5}$	-1
$Q(x)$	57	369	1177	$14\sqrt{2} + 5$	$\frac{26}{5}$	-6

Los pasos que hemos seguido para evaluar la función polinómica son laboriosos, hemos transformado el polinomio realizando las siguientes operaciones,

$$\begin{aligned} Q(x) &= 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \\ &= (5x^2 + 2x + 4)x + 1 \\ &= ((5x + 2)x + 4)x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(2) &= ((5 * 2 + 2)2 + 4) * 2 + 1 \\ &= (12)2 + 4)2 + 1 \\ &= (24 + 4)2 + 1 \\ &= 56 + 1 = 57 \end{aligned}$$

El procedimiento es laborioso y si aumenta el grado del polinomio se vuelve aún más. Una forma alternativa de reducir las operaciones y encontrar la solución es el método de Horner³²

Este procedimiento comienza por escribir una tabla. En primer lugar, ordenamos el polinomio del mayor al menos coeficiente. Después, en la primera línea se escriben los coeficientes del polinomio. En nuestro caso,

	5	2	4	1

La segunda línea inicia con el valor de x que nos interesa, en nuestro ejemplo $x = 2$, en esta línea vamos a evaluar el polinomio. El algoritmo consiste en copiar en la tercera línea el primer coeficiente, lo multiplicamos por el valor de 2 y escribimos el producto en la segunda línea,

	5	2	4	1
2		10		
	5			

El procedimiento continúa con la suma, o resta en su caso, de los valores en la siguiente columna, de manera de ir completando la tercera línea y multiplicando a su vez cada resultado por el valor de 2 y así sucesivamente hasta llenar la tabla.

	5	2	4	1
2		10	24	56
	5	12	28	57

El ultimo valor a la derecha es el resultado deseado

1.8.2 Operaciones con polinomios

Las operaciones básicas para realizar entre dos o más polinomios son las siguientes,

- La suma de dos polinomios P y Q es el polinomio $P + Q$ definido por
 - $(P + Q)x = P(x) + Q(x)$

³² William George Horner (1786 – 1837), matemático inglés. En realidad, el método fue descubierto en China 500 años antes por Zhu Shijie.

- La resta de dos polinomios P y Q es el polinomio $P - Q$ definido por
 - $(P - Q)x = P(x) - Q(x)$
- La multiplicación de dos polinomios P y Q es el polinomio $P \cdot Q$ definido por
 - $(P \cdot Q)x = P(x) \cdot Q(x)$
- El producto de un polinomio P por un real k es el polinomio kP definido por
 - $(kP)x = k \cdot P(x)$

Estas cuatro operaciones se realizan de la misma manera si se trata de polinomios de una o varias variables. La consideración más importante, en el caso de suma o resta, es combinar solo términos semejantes. Para la multiplicación no se necesita esta consideración como lo ejemplificaremos posteriormente.

En cualquier caso, las operaciones se realizan entre monomios y al final si se requiere se agrupan si así se requieren. Las reglas de operación son las mismas que las de las operaciones aritméticas.

Los términos semejantes son aquellos monomios que difieren solamente de la constante; es decir, constante diferente y variables iguales con el mismo exponente. Por ejemplo,

- a) $12x^3$ y $-\sqrt{6}x^3$ Son términos semejantes, solo difieren en la constante
- b) $3x^5y^2$ y $-4x^5y^2$ Son términos semejantes, difieren solo en la constante
- c) $3x^2y^5$ y $-3x^5y^2$ No son términos semejantes, difieren en los exponentes
- d) $2a^3b^2$ y $2c^3b^2$ No son semejantes difieren en las variables

Ejemplos. Calcular la suma, resta y multiplicación de los siguientes polinomios,

- a) Suma y resta de polinomios. La operación se realiza entre los monomios que tienen las mismas variables y el mismo grado. Así,

$$\begin{array}{lll}
 \bullet & 3x^5 - 6x^5 & (3 - 6)x^5 & -3x^5 \\
 \bullet & 2x^4y^3 + 5x^4y^3 & (2 + 5)x^4y^3 & 7x^4y^3 \\
 \bullet & 4x^2y^3 + 3x^3y^3 - 7x^2y^3 & (4 - 7)x^2y^3 + 3x^3y^3 & -3x^2y^3 + 3x^3y^3
 \end{array}$$

La operación solo es válida para los dos monomios semejantes.

- $2a^2b^3 + 3a^3b^3 + 4b^3 - 2a^5b^3$ no se puede realizar la operación los términos no son semejantes.
- $2x^4y^2 + 3x^3y^3 + x^4y^2 - 2x^3y^3$ la operación se realiza entonces solo entre los monomios iguales

En primer lugar $(2 + 1)x^2y^3 + (3 - 2)x^3y^3$

$$3x^2y^3 + x^3y^3$$

Claro que podríamos utilizar paréntesis para agrupar términos, lo ilustraremos posteriormente con la multiplicación y la división.

- Sumar los tres polinomios siguientes,

$$4x^2y^3 + 5x^3y^3 - y^3 \quad x^4y^3 + 2x^2y^3 - x^2 \quad 2x^2y^3 + 3x^3y^3$$

Agrupamos los polinomios en forma horizontal, como en el ejemplo anterior o en forma vertical, cuidando que los términos semejantes queden en la misma columna. Empezamos con el polinomio de mayor grado.

$$\begin{array}{r} x^4y^3 + 2x^2y^3 \quad - x^2 \\ 4x^2y^3 + 5x^3y^3 \quad - y^3 \\ 2x^2y^3 + 3x^3y^3 \\ \hline x^4y^3 + 8x^2y^3 - x^2 - y^3 \end{array}$$

- b) Multiplicación de polinomios. Nuevamente la operación se realiza entre monomios y los exponentes se suman, o restan. Para los siguientes polinomios, realizar la operación que se indica,

$$P(x) = 4x^2 + 5x^3 \quad Q(x, y) = x^4y^3 + 2x^2y^3 - x^2 \quad R(x, y) = 2x^2y^3$$

- $6 \cdot P(x)$
 $= 6(4x^2 + 5x^3) = 24x^2 + 30x^3$
- $P(x) \cdot R(x, y)$
 $= (4x^2 + 5x^3)(2x^2y^3)$ multiplicamos cada monomio del primero por los monomios del segundo y se suman los exponentes. El coeficiente resultante es la multiplicación de ellos.

$$\begin{aligned} &= (4x^2)(2x^2y^3) + (5x^3)(2x^2y^3) \\ &= 8x^4y^3 + 10x^5y^3 \end{aligned}$$

- $R(x, y) \cdot Q(x, y)$
 $= (2x^2y^3)(x^4y^3 + 2x^2y^3 - x^2)$
 $= (2x^2y^3)(x^4y^3) + (2x^2y^3)(2x^2y^3) + (2x^2y^3)(-x^2)$
 $= (2x^6y^6) + (4x^4y^6) - (2x^4y^3)$
 $= 2x^6y^6 + 4x^4y^6 - 2x^4y^3$

- $P(x) \cdot Q(x, y) \cdot R(x, y)$

Por la ley conmutativa de la división sabemos que

$$P(x) \cdot Q(x, y) \cdot R(x, y) = P(x) \cdot R(x, y) \cdot Q(x, y)$$

Realizamos la operación en dos partes, primero $R(x, y) \cdot R(x)$ y a este resultado lo multiplicamos por $P(x, y)$. Aprovechamos el resultado del ejercicio anterior.

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x, y) \cdot R(x, y) &= (4x^2 + 5x^3)(2x^6y^6 + 4x^4y^6 - 2x^4y^3) \\ &= 8x^8y^6 + 16x^6y^6 - 8x^6y^3 + 10x^9y^6 + 20x^7y^6 - 10x^7y^3 \\ &= 10x^9y^6 + 8x^8y^6 + 20x^7y^6 - 10x^7y^3 + 16x^6y^6 - 8x^6y^3 \end{aligned}$$

- $P(x)^n$. La potencia de un polinomio equivale, igual que en los enteros, a multiplicar n veces el polinomio. En algunos casos aplicamos la ley del binomio cuadrado de newton, o el triángulo de pascal para su evaluación.

$$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5) = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$$

O bien utilizando el triángulo de Pascal. Que recordemos se forma así.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Es una representación de los coeficientes de un binomio de la forma $(x + y)^n$. Se inicia con el número 1, en la primera línea, cuando $n = 0$. La segunda línea se forma con la suma de los dos coeficientes superiores a la izquierda de este y se termina cada línea con el valor unitario. Los valores en los renglones corresponden a los coeficientes del binomio.

Para resolver el ejercicio anterior, aplicando el triángulo de pascal. En primer lugar, sabemos que es un binomio cuadrado, por lo que utilizamos los coeficientes del tercer renglón. Entonces,

$$(x + 5)^2 = (1)(x) + (2)5x + (1)5^2 = x^2 + 10x + 25$$

Las potencias de los términos se inician con la potencia mayor y se reducen en una unidad hasta el fin, el segundo término es similares pera en el otro sentido, por ejemplo

$$(u + v)^3$$

Los coeficientes del polinomio, de acuerdo con el triángulo de pascal son, (1,3,3,1). Entonces el resultado sería

$$\begin{aligned}(u + v)^3 &= 1u^3v^0 + 3u^2v^1 + 3u^1v^2 + 1u^0v^3 \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3\end{aligned}$$

Como se aprecia, las potencias de cada termino se van reduciendo en una unidad en un sentido y lo mismo con el segundo elemento del binomio. En el caso de una resta el signo se intercambia, positivo y negativo.

Ejemplo

$$\begin{aligned}(x - 2y)^3 &= 1x^3(2y)^0 - 3(x^2)(2y^1) + 3(x^1)(2y^2) - 3(x^0)(2y^3) \\ &= x^3 - 6x^2y + 6xy^2 - 24y^3\end{aligned}$$

Un último ejemplo, un trinomio cuadrado, obtendremos su resultado por agrupamiento de sus monomios. Resolver el siguiente trinomio cuadrado.

$$\begin{aligned}(2x - 3y + 4z)^2 \\ (2x - 3y + 4z)^2 = ((2x - 3y) + 4z)^2\end{aligned}$$

Agrupamos los dos primeros monomios y resolvemos, nos apoyamos en la tercera línea del triángulo de Pascal.

$$\begin{aligned}((2x - 3y) + 4z)^2 &= (2x - 3y)^2 + 2(2x - 3y)(4z) + (4z)^2 \\ &= (2x - 3y)^2 + 8(2x - 3y)z + 16z^2\end{aligned}$$

Resolvemos el binomio cuadrado y efectuamos las operaciones indicadas, finalmente

$$(2x - 3y + 4z)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 16xz - 24yz + 16z^2$$

1.8.3 División entre polinomios

Para explicar la división entre polinomios, partimos de la división entre monomios, después entre un polinomio y un monomio y finalmente la división general entre polinomios.

- a) División entre monomios. El cociente de dos monomios es un monomio si y solo si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador. El resultado se obtiene al restar los exponentes del numerador y del denominador, para cada variable.

$$\frac{6t^5}{2t^2} = \frac{6\cancel{t^3}t^2}{2\cancel{t^2}} = 3t^3 ; \quad \frac{4x^4y^3}{3y^2} = \frac{4x^4}{3} \left(\frac{y^3}{y^2} \right) = \frac{4}{3}x^4y$$

$$\frac{3a^2}{2a^3} = \frac{3a^2}{2aa^2} = \frac{3}{2a} = \frac{3}{2}a^{-1}$$

*el resultado no es un monomio,
un monomio no puede tener exponente negativo*

- b) División de un polinomio entre un monomio. De manera similar vamos a dividir cada monomio del numerador entre el denominador.

$$\begin{aligned} \frac{4x^4 + x^3 - 6x^2 - 5}{3x^2} &= \frac{4x^4}{3x^2} + \frac{x^3}{3x^2} - \frac{6x^2}{3x^2} - \frac{5}{3x^2} \\ &= \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2 - \frac{5}{3x^2} \end{aligned}$$

Después de dividir cada monomio del numerador por el denominador, el resultado no es un polinomio porque el último término $\frac{5}{3x^2}$ lo impide. En el caso de varias variables el procedimiento es similar.

$$\begin{aligned} \frac{5x^5y^3 + 2x^4y^2 - 8x^3y^3 - 5y^3}{3x^2y^3} &= \frac{5x^5y^3}{3x^2y^3} + \frac{2x^4y^2}{3x^2y^3} - \frac{8x^3y^3}{3x^2y^3} - \frac{5y^3}{3x^2y^3} \\ &= \frac{5x^5y^3}{3x^2y^3} + \frac{2x^4y^2}{3x^2y^3} - \frac{8x^3y^3}{3x^2y^3} - \frac{5}{3x^2y^3} \\ &= \frac{5}{3}x^3 + \frac{2x^2}{3y} - \frac{8}{3}x - \frac{5}{3x^2} \end{aligned}$$

El resultado no es un polinomio, por causa de los términos $\frac{2x^2}{3y}$ y $\frac{5}{3x^2}$. Por esta razón en muchos casos es mejor utilizar la división euclidiana que nos permite obtener como resultado de la división un polinomio y un resto.

- c) División entre dos polinomios. Es el caso general, y lo resolvemos con la división euclidiana, que se parece a la división entre enteros

Por ejemplo,
$$\frac{2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

Iniciamos con un arreglo como el siguiente,

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 5x + 4 \\
 \hline
 x^2 + 1 \quad \left| \begin{array}{r}
 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2 \\
 -2x^4 \qquad \qquad - 2x^2 \\
 \hline
 -5x^3 + 4x^2 \qquad - 2 \\
 5x^3 \qquad \qquad + 5x \\
 \hline
 4x^2 + 5x - 2 \\
 -4x^2 \qquad \qquad - 4 \\
 \hline
 5x - 6
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
 \left(\frac{2x^4}{x^2}\right) = 2x^2 \\
 \left(\frac{-5x^3}{x^2}\right) = -5x \\
 \left(\frac{4x^2}{x^2}\right) = 4
 \end{array}
 \end{array}$$

Finalmente, el polinomio resultante es

$$\begin{aligned}
 \frac{2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2}{x^2 + 1} &= 2x^2 - 5x + 4 + \frac{5x - 6}{x^2 + 1} \\
 &= (x^2 + 1)(2x^2 - 5x + 4) + 5x - 6
 \end{aligned}$$

Que es un polinomio, de dos partes

El cociente. $(x^2 + 1)(2x^2 - 5x + 4)$

Y el resto $5x - 6$

En cada paso, del ejercicio anterior, hemos seguido el siguiente algoritmo.

1. Dividimos el monomio de mayor grado del dividendo entre el monomio más grande del divisor. La primera vez el valor es

$$\left(\frac{2x^4}{x^2}\right) = 2x^2$$

Es el primer término del resultado.

2. Multiplicamos este término por el divisor,

$$(x^2 + 1) \cdot 2x^2 = 2x^4 + 2x^2$$

3. Restamos este resultado al dividendo

$$2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2 - (2x^4 + 2x^2) = -5x^3 + 4x^2 - 2$$

4. De esta manera el nuevo dividendo, también llamado **resto**, es $-5x^3 + 4x^2 - 2$ a este polinomio lo dividimos entre el dividendo original y reiniciamos el proceso.

$$\frac{-5x^3 + 4x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

5. El proceso se detiene cuando el grado del *resto* es menor que el grado del divisor, en nuestro caso cuando el resto es

$$\frac{5x - 6}{x^2 + 1}$$

Si después del proceso el resto es igual con 0, entonces la división se llama *exacta*

- d) La división euclidiana, o división sintética, entre dos polinomios $A(x)$ el dividendo, y $B(x)$ el divisor, donde $B(x) \neq 0$, da como resultado dos polinomios únicos $P(x)$ y $R(x)$ tal que,

$$A(x) = B(x) \cdot P(x) + R(x)$$

Donde $P(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el resto. Ambos son polinomios y se debe cumplir que el grado de $R(x)$ sea menor que el grado de $B(x)$

En algunos casos, la división polinómica se puede encontrar más fácilmente si el denominador tiene la forma de $x - a$. El esquema de *Horner* es particularmente útil para evaluar este tipo de polinomios. Si sustituimos este resto en la solución tendremos,

$$A(x) = (x - a) \cdot P(x) + R(x)$$

Como el grado de el resto $R(x)$ es menor al grado de $(x - a)$, es claro que el grado de $R(x)$ es igual a cero, de lo que concluimos que el resto es una constante.

$$R(x) = c. \text{ donde } c \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo. Evaluar la siguiente división polinómica.

$$\frac{2x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 5x + 3}{x - 3}$$

Resolvemos utilizando el esquema de Horner.

	2	-4	-3	-5	3
3		6	6	9	12
	2	2	3	4	15

El polinomio resultante es;

$$2x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 5x + 3 = (x - 3) \underbrace{(2x^3 + 2x^2 + 3)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{15}_{\text{resto}}$$

Ejercicios.

Determine el grado de los siguientes polinomios

1. $4x^2 + x - 2$
2. $2x^4 - 3x^5 + x^2 + 3$
3. $5y^3 + y^2 - 1$
4. $w^3 + \frac{3}{2}w^2 + w$
5. $xy^3 + x^4y^2 - xy^3 - 1$
6. $x^3y^2 + x^2y^3 + 2x^6 - 5$

Efectuar la operación que se indica

1. $2(x + 5) - 3(x - 2) + 5x$
2. $3(u^2 - 3) - (2u + 1) - 4(3u^2 - 4)$
3. $2x - (x + 3) - 5(x + 5) - 25$
4. $5(uv + u) - 2(4v - 3uv)$
5. $(xy + 1)(2x - y) + 2x^2y^2$
6. $(6y - 5)(4y - \frac{3}{4})$
7. $(4w^2 + 5w + 1)(w + 3)$
8. $(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{2})(x + \frac{2}{3})$
9. $(x^2 - 3xy + y^2)(x^2 + 3xy + y^2)$
10. $(x + y)^2 - x^2$
11. $(x + y)^3$
12. $(u + v)^2(2u + 4)^2$
13. $2(x + y)^2 - 3(x + y) - 2(-4x^2 + 6y)$
14. $(u + v - 5)^2(u + v)$
15. $(3x - 4y + 2)^2 - (3x + y)^2$
16. $\frac{x^2+5x+3}{x+4}$
17. $\frac{x^2-2x+3}{x-3}$
18. $\frac{4x^2(x^2+1)^2-4x(x^3+3)^3}{x^2}$

1.8.4 Factorización de polinomios.

Descomponer un número entero en factores es encontrar dos o más enteros que multiplicados entre ellos resulte en el valor original. Por ejemplo,

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

Análogo, los polinomios se pueden descomponer en varios monomios multiplicados entre si, como en el caso

$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

Este tipo de descomposición se conoce más precisamente como Factorización de un polinomio.

a) Factorización por agrupamiento, raíces de un polinomio

La solución de un polinomio y sus raíces son conceptos similares. En lo que sigue vamos a revisar el caso de polinomios de una variable. Las raíces de un polinomio son los valores de la variable de interés que hacen cero la solución al polinomio. Para el ejercicio anterior,

$$P(x) = x^2 - 25$$

Cuando $x = 5$ y $x = -5$ la función polinómica vale cero. Por esta razón se puede factorizar la expresión con,

$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

Un polinomio de grado n tiene también n raíces. Estas pueden ser enteras, reales, fraccionarias o complejas.

Algunas propiedades importantes

Para cualquier par de valores a, b que están en los reales, $a, b \in \mathbb{R}$

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ Diferencia de cuadrados
- $a^2 + b^2$ Diferencia de dos cuadrados
no se factoriza
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ Trinomio cuadrado perfecto
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ Diferencia de cubos
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ Suma de cubos
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

Ejemplos. En los ejercicios siguientes aplicar las propiedades anteriores

- $P(x) = 4x^2 - 25 =$
 $= (2x)^2 - 5^2$ Diferencia de cuadrados
 $= (2x - 5)(2x + 5)$
- $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$
 $= (x^3 - x^2) - 2(x - 1)$
 $= x^2(x - 1) - 2(x - 1)$ Factor común $(x - 1)$
 $= (x - 1)(x^2 - 2)$ Agrupar por factor común
 $= (x - 1)(x - 2)(x + 2)$ Utilizar diferencia de cuadrados
- $P(x) = 9x^2 - 24x + 16$
 $= (3x)^2 - 2(3x)(4) + 4^2$ Trinomio cuadrado perfecto
 $= (3x - 4)^2$
- $P(x) = x^3 + 5x^2 - 6x - 30$
 $= (x^3 - 6x) + (5x^2 - 30)$ Agrupar términos
 $= x(x^2 - 6) + 5(x^2 - 6)$ Factor común $(x^2 - 6)$
 $= (x + 5)(x^2 - 6)$ Agrupar por factor común

En el caso de polinomios de varias variables, se aplican las mismas propiedades

- $Q(x, y) = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
 $= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$ Trinomio cuadrado perfecto
 $= (2x + 3y)^2$
- $Q(x, y) = 8x^3 + y^3z^3$
 $= (2x)^3 + (yz)^3$ Suma de cubos
 $= (2x + yz)(4x^2 - 2xyz + y^2z^2)$
- $Q(u, v) = u^3v - 9uv^3$
 $= uv(u^2 - (3v)^2)$ Diferencia de cuadrados
 $= uv(u - 3v)(u + 3v)$
- $Q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x - y$
 $= x^2 + xy + xy + y^2 - x - y$
 $= (x^2 + xy - x) + (y^2 + xy - y)$
 $= x(x + y - 1) + y(y + x - 1)$
 $= (x + y)(x + y - 1)$

b) Factorización por el método de raíces enteras.

En párrafos anteriores hemos visto que, para factorizar un polinomio se necesita conocer el valor que anula el polinomio; es decir, el valor de la variable que hace que el polinomio valga cero. Por ejemplo, en el siguiente ejemplo, el valor de 2 es una raíz ya que,

$$P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$$

Si sustituimos con $x = 3$, el polinomio $P(x = 3) = 0$

Así, un cero o una raíz de un polinomio, es una solución, un valor real tal que el valor del polinomio es cero. Encontrar estos valores no es muchas veces obvio; sin embargo, algunos métodos nos permiten encontrarlos, al menos parcialmente de una forma sencilla.

Para encontrar estos valores utilizamos una variación de la división euclidiana, el método de la *división sintética*. A un polinomio cualquiera $P(x)$, lo dividimos por otro polinomio de la forma $Q(x) = x - a$, donde a es un número entero, así factorizamos el polinomio y los valores que toma a son los ceros o aquellos que hacen cero el polinomio, $P(x = a) = 0$.

El método de división sintética consiste entonces en encontrar los valores de a que al dividir $\frac{P(x-a)}{Q(x-a)} = p(x)d(x) + r(x)$, tengamos un residuo $r(x) = 0$. Es decir,

$$P(x) = p(x)d(x) + r(x), \text{ donde } r(x) \text{ es cero}$$

Encontrar estos valores enteros no es simple. Si un polinomio admite una raíz entera, esta es necesariamente un divisor del término independiente.

Ejemplo. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Los divisores de +6 y posibles candidatos a la división son;

$$Div(+6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

Resolvemos utilizando el esquema de Horner, iniciamos con $x = 1$

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

El polinomio equivalente,

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$

Continuamos con división sintética

	1	-1	-6
-1		-1	3
	1	-2	-3

El resto $r = 3$, es diferente de cero por lo tanto no es un cero y no simplifica el resultado anterior, probamos con otros valores, por ejemplo, con $x = -2$.

	1	-1	-6
-2		-2	6
	1	-3	0

Es una raíz del polinomio, por lo tanto, el polinomio equivalente sería,

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

Las raíces son entonces $\{1, -2 \text{ y } 3\}$

Ejemplo. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$,

Los candidatos a la prueba son $Div(-4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Resolvemos por división sintética,

	1	-2	-4	8
1		1	-1	-5
	1	-1	-5	3

Para $x = -1$ el residuo $r \neq 0$; no es una raíz del polinomio

	1	-2	-4	8
-1		-1	3	1
	1	-3	-1	9

Para $x = 1$ el residuo $r \neq 0$; no es una raíz del polinomio

	1	-2	-4	8
2		2	0	-8
	1	0	-4	0

Para $x = -2$ el residuo $r = 0$; es una raíz. El polinomio equivalente es

$$P(x) = (x + 2)(x^2 - 4)$$

El método se detiene en este paso ya que las raíces del polinomio equivalente al factorizar son; $x = -2$, $x = 2$ y $x = -2$; hay una raíz doble.

$$P(x) = (x + 2)(x + 2)(x - 2)$$

Cualquiera de los dos últimos resultados es válido.

Ejercicios

Factorizar y simplificar las siguientes expresiones.

1. $x(3x - 1) - 4(3x - 1)$
2. $4u^2 - 12u + 9$
3. $x^2 - x + 3x - 3$
4. $6x^2 - 30x - x + 5$
5. $2x^2 + 12x + 18$
6. $x^4 - 4x^2$
7. $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$
8. $P(x) = 16x^4 - 1$
9. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
10. $P(x) = x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 4x^2$
11. $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - 9x - 2$
12. $P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$

Bibliografía

Barnett R.A, Ziegler M.R. y Byleen K.E. *College Algebra*, 7a edición, McGraw-Hill, New York, USA, 2001