# Capítulo 9.

## Estadística y Probabilidad.

Notas de clase R. Urbán

*"Conseguimos obtener así la fórmula estadística para conocer aproximadamente la posición de un electrón en un instante determinado. Pero, personalmente, no creo que dios juegue a los dados."*

***Albert Einstein***

## *9.1 Antecedentes*

Los juegos de azar, o quizá la necesidad de medir la riqueza de una sociedad, dieron origen a lo que hoy conocemos como la teoría de la probabilidad y estadística. Se estima entre 1650 y 1670 como el período en que nacieron estas dos aplicaciones matemáticas, casi en paralelo. El cálculo de probabilidades inicia con Pascal, y Fermat 1654 basados en los juegos de azar. Sin embargo, fue hasta 1656 cuando Huygens[1] publica el primer tratado sobre probabilidad "De ratiociniis in ludo aleae" sobre los cálculos en los juegos de azar en donde introduce los conceptos de esperanza matemática y resuelve problemas propuestos por Pascal y Fermat. Unos años después, en 1713, Jacques Bernoulli publica su libro "Ars Conjectandi", el arte de la conjetura, que contiene la primera declaración de la ley de los números grandes teorema que es la base de las interpretaciones de la escuela frecuentista.

En 1733 D'Moivre en su libro "The Doctrine of Chances" demuestra la primera forma del teorema del límite central (límite de una distribución binomial), que pone de relieve el papel central de la distribución normal en la teoría de la probabilidad. Posteriormente, en los siglos XVIII y XIX, Laplace y Gauss perfeccionan y enriquecen significativamente la teoría matemática de la probabilidad. Laplace en 1812 publica su *"Teoría analítica de las probabilidades"* donde incluye el método de mínimos cuadrados. Johan Carl Gauss[2] es considerado el matemático más importante de la antigüedad, entre sus muchos aportes destacamos la famosa *campana de Gauss* que es una representación visual de la distribución normal.

Los matemáticos rusos Chebyshev, Markov y los franceses Poincaré y Borel (1871-1956)) a lo largo del siglo IXX y XX realizan contribuciones importantes. Finalmente, en 1933, Kolmogorov (1903-1987) en su libro "Los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad", estructuro el marco axiomático de la teoría de la probabilidad a partir de la teoría de conjuntos.

[1] Nació en La Haya Holanda,(1629-1695). Matemático, astrónomo y físico. Realizó aportes importantes en los campor de la física y la astronomia, inventor del reloj de péndulo y elaboró la Teoría ondulatoria de la luz.

[2] Johan Carl Gauss, nace en Braunschweig Alemania el 30 de abril de 1777 y fallece en 1855. fue matemático, astrónomo y físico fue considerado como el Príncipe de los matemáticos, por sus aportes en la teoría de los números, geometría diferencial, álgebra, estadística, astronomía, óptica y otras ciencias.

Notas de clase R. Urbán

*Propósito de la estadística*

Una actividad cotidiana del economista es tomar decisiones sobre problemáticas no muy claras o en condiciones de incertidumbre en las que es necesario contar con la información necesaria para reducir el riesgo de una mala decisión. Estar informados hoy en día es de vital importancia a todos los niveles.

La información y los datos son elementos diferentes. Los datos, números, cantidades, datos cuantitativos, son registros de hechos sin un contexto como la edad el salario. La información, es el resultado del análisis de los datos con el fin de dar contexto y significado a los datos y transformarlos en conocimiento.

Las nuevas tecnologías de información ayudan a poner a disposición de quien lo necesite una gran cantidad de información.

- El INEGI y la mayoría de las oficinas del gobierno publican periódicamente información numérica sobre la inflación y el desempleo, a través de índices de precios, tasa de desempleo, etc.
- Los profesionistas que realizan previsiones; los economistas, los asesores financieros y los que determinan las políticas de una empresa, industria y del gobierno estudian estos datos para tomar decisiones basadas en la información obtenida.
- Con el fin de ofrecer un tratamiento adecuado en los centros de salud, deben entender la información estadística de las investigaciones que se publican en las revistas médicas sobre efectos de nuevas drogas, tratamientos de enfermedades, etc.
- En política, para medir las tendencias de voto. O bien para medir el impacto de programas y proyectos sociales, como el financiamiento a programas de apoyo a la producción.
- Las empresas basan sus decisiones en estudios de mercado sobre los patrones de compra de los consumidores, pruebas de nuevos productos, etc.

Diariamente los medios de comunicación “bombardean” con datos, estos en si no son relevantes hasta que le damos contexto los utilizamos para entender el comportamiento de un evento. Las “estadísticas” se nutren de los números generados por espacios informativos, publicidad, resultados de eventos deportivos, sondeos de opinión, debates públicos, etc. Para las organizaciones modernas es importante contar con datos que les ayuden a tomar decisiones, que les permitan realizar análisis sustentados que les permitan prever el comportamiento futuro de la empresa. A su vez, estas empresas producen gran variedad de datos todos los días y que están a disponibilidad de usuarios de diferentes formas, estados financieros, capacidad de producción, etc.

Algunos de estos nuevos datos son resultado de las operaciones cotidianas o periódicas de organismos y dependencias que registran sus actividades y están obligados a publicarlas; otros, son el resultado de estudios e investigaciones especiales. Sin procedimientos

Notas de clase R. Urbán

estadísticos, ninguna organización podría transformar en información útil la gran cantidad de datos generados por su actividad.

El tratamiento estadístico de los datos se simplifica mucho con el empleo de computadora. Los programas de cómputo especializados son variados, hojas de cálculo como el famoso EXCEL y software estadístico como MINITAB y SPSS, por citar algunos de ellos. Existen otros en el mercado que realizan funciones similares, como el SAS, STAT, etc. Destaca el paquete EPIINFO[3] de plataforma libre, diseñado por el Centro para el Control de Enfermedades de Atlanta (CDC) y que se distribuye en forma gratuita

*El **análisis estadístico** nos provee un conjunto de principios y procedimientos para manipular, resumir e investigar datos con el fin de obtener información útil en la toma de decisiones.*

*En resumen, la **estadística** es una ciencia, con base matemática, referente a la recolección, análisis e interpretación de datos, que busca explicar condiciones regulares en fenómenos de tipo aleatorio. Es transversal a una amplia variedad de disciplinas, desde la física hasta las ciencias sociales, desde las ciencias de la salud hasta el control de calidad, y es de gran utilidad para la toma de decisiones en áreas de negocios e instituciones gubernamentales.*

## *9.2 Tipos de variables[4].*

Las variables en estadística son representaciones que toman valor de acuerdo con el resultado de un experimento. Se pueden presentar sobre formas diferentes. Estas representaciones reflejan las propiedades intrínsecas de las variables e influyen de manera decisiva en el tipo de análisis que puede realizarse con ellas.

Las variables, pueden ser una medida o una caracteristica observable de un elemento o de una población. De esta manera a partir de la característica de interés que interesa observar en la población, en relación con el objetivo de estudio, las variables pueden ser de dos tipos:

- *Cualitativas* o atributos: los valores que toma la variable son no jerárquicos, no se pueden listar en un orden lógico; no se pueden medir numéricamente (por ejemplo: la nacionalidad, el color de la piel, sexo etc.)

[3] EPIINFO, es un software gratuito con más de 20 años de existencia. Está disponible para la plataforma Windows, desarrollado por los Centros para el Control y la Prevención de Enfermedades de los Estados Unidos (CDC). Permite, diseñar encuestas y captura de datos y análisis estadístico de la información de la muestra. Se puede descargar del sitio http://www.cdc.gov/epiinfo.

[4] Para evitar ambigüedad, una variable estadística expresa una medición y un dato, son los valores que adquieren estas variables. Por ejemplo, la nacionalidad de una persona es la variable y el dato es el país. Así la variable puede tomar valores como; mexicano, francés, español, etc.

Notas de clase R Urbán

- *Cuantitativas*: los valores que toman estas variables permiten a los elementos en estudio ser colocados en un orden lógico, según una jerarquía natural. Tienen valor numérico (edad, salario, precio de un producto, ingresos anuales). Estas variables a su vez se clasifican en:
    - Discretas**:** sólo pueden tomar valores enteros $(1, 2, 8, -4, etc.)$. Por ejemplo: número de hermanos puede ser 1,2,3,… pero nunca 3.45.
    - Continuas: a la inversa de las discretas, pueden tomar cualquier valor real dentro de un intervalo. Por ejemplo, la velocidad de un vehículo puede ser 80,3 km/h, 94,57 km/h….etc.

Además, las variables pueden ser;

**a)** Unidimensionales: sólo recogen información sobre una característica de la población bajo estudio (por ejemplo: edad de los alumnos de una clase).

**b)** Bidimensionales: recogen información sobre dos características de la población (por ejemplo: edad y altura de los alumnos de una clase).

**c)** Pluridimensionales: recogen información sobre tres o más características (por ejemplo: edad, altura y peso de los alumnos de una clase).

### *9.4 Transformación de variables cualitativas en cuantitativas*

Ciertos tratamientos y datos eventualmente necesitan ser modificados para poderlos utilizar adecuadamente. Este es el caso de las variables cuantitativas, como el sexo de una persona o la nacionalidad, que necesitan ser manipulables o bien compatibles con los programas de cómputo estadísticos, por ejemplo, para construir una tabla de frecuencias. En estos casos, es necesario transformar la variable cuantitativa con un código que la modifique a una variable pseudo numérica.

Una variable cualitativa ordinal, con un orden definido, por ejemplo, para medir la calidad de un servicio médico, puede tomar los valores; muy bueno, bueno, regular, malo y muy malo. Es claro que muy bueno, es mejor que bueno y sucesivamente. La recodificación numérica de la variable debe considerar este orden jerárquico. Así, podríamos asignar el siguiente código.

5 = Muy bueno
4 = Bueno
3 = Regular
2 = Malo
1 = Muy malo

En esta recodificación, el orden de la numeración indica el grado de satisfacción. Esta regla no sería de utilidad para variables cuyos resultados no siguen un orden jerárquico. Por

Notas de clase R. Urbán

ejemplo, la modalidad *masculina y femenina*. En este caso no tiene sentido dar una jerarquía y podríamos recodificar,

| | | |
|---|---|---|
| 1= Masculino | o bien | 1=Femenino |
| 2= Femenino | | 2=Masculino |

Podríamos utilizar cualquier codificación sin que se alteren los resultados. Es necesario aclarar que el valora que toma este tipo de variables no puede ser objeto de operaciones aritméticas como, por ejemplo, el cálculo de una suma o la del promedio. En realidad, son números que no modifican en nada las propiedades fundamentales de la variable cuantitativa ya sea nominal u ordinal. En suma, la transformación de una variable cualitativa en numérica no le otorga ninguna propiedad numérica.

## *9.5 Población y Muestra*

Una ***población***, en estadística, es un conjunto de elementos o individuos que tienen una misma característica. Por ejemplo, los habitantes de un país, los trabajadores de una empresa o la población de productores de café de una comunidad. Cada una de estas poblaciones tiene características que la diferencian de otras. En sus orígenes, la estadística era utilizada por los países para estudiar la cotidianidad de sus ciudadanos, quizá por eso el término población.

La ***Población***, se puede resumir como; el conjunto de todos los elementos (individuos o unidades estadísticas; como personas, objetos, animales, etc.) que tienen características comunes.

> *Parámetro.* Es una medida que resume información de una característica o variable de la población.

*Por ejemplo,*

- La población que vive en una comunidad específica, parámetros de este grupo puede ser, la edad promedio, el sexo, nivel educativo
- La población económicamente activa, parámetros pueden ser el nivel salarial, sexo, sector industrial
- El conjunto de vacas y toros en un rancho ganadero, algunos parámetros pueden ser, producción lechera, edad, número de crías
- Los Obreros que trabajan en un sector industrial, parámetros; nivel salarial, prestaciones sociales, capacitación, salud, etc.
- Los árboles de una bosque

Notas de clase R. Urbán

Una población puede ser finita o infinita. Por ejemplo, la población de votantes de una ciudad es finita, mientras que la determinada por todos los posibles resultados (caras, cruces) de sucesivas tiradas de una moneda, es infinita.

Al recoger datos relativos a las características de un grupo de individuos por ejemplo el ingreso familiar de una comunidad, la edad de los trabajadores de una empresa, la calidad de un tipo de café que produce una comunidad, suele ser imposible o nada práctico y en la mayoría de los casos costoso, observar por ejemplo toda la producción de café, en especial si es un área muy grande.

La *Unidad de análisis*, es el sujeto fundamental. Es cualquier elemento que porte información sobre el fenómeno que se estudia. Así, si estudiamos la altura de los niños de una clase, cada alumno es una unidad de análisis; si estudiamos el precio de la vivienda, cada vivienda es una unidad de análisis.

Cuando trabajar con una población es costoso o complicado; como por ejemplo, en una encuesta de opinión, sería mas conveniente y menos costoso trabajar con solo una parte de la población. En vez de examinar la población, o universo, se examina una pequeña parte del grupo, que llamaremos ***muestra***. En las ciencias naturales, por ejemplo, para analizar la calidad del agua en un rio o para realizar un análisis de sangre en una persona, basta con tomar una muestra pequeña de la zona o del individuo, a partir de esta muestra podemos suponemos que el resto tiene la misma calidad.

Una ***muestra*** es un subconjunto de elementos tomados de la población en estudio. Así, si se estudia el nivel de ingreso de una comunidad, lo normal será no recoger información sobre todos los hogares de la comunidad (sería una labor costosa y muy compleja), sino que se suele seleccionar un subgrupo (muestra) que sea lo suficientemente representativa de la población.

> *Estadístico.* Es una medida que resume datos de una variable obtenida a partir de los datos de una muestra.

Si una *muestra* es representativa de una población, es posible inferir importantes conclusiones sobre las poblaciones a partir del análisis de la muestra.

Por ejemplo, en una encuesta de opinión sobre las preferencias de una población en una elección de un cargo. Consultar a todos los votantes para poder medir sus preferencias sería una labor costosa y muy difícil; como única alternativa lo que las agencias realizan, es obtener una muestra de los votantes con la expectativa de que la proporción de votos para cada candidato en la muestra describa lo más cercano posible el comportamiento de la población. Si los resultados de la muestra son favorables a un candidato, las preferencias de la población no debieran ser muy diferentes. La elección de la muestra representativa es determinante para estimar el comportamiento de la población

Notas de clase R. Urbán

Cuando hacemos inferencia del comportamiento de una población a partir de los datos de una muestra estamos en lo que se conoce como ***inferencia estadística.***

Por otro lado, la parte de la estadística que sólo se ocupa de describir y analizar un grupo dado, sin sacar conclusiones sobre un grupo mayor, se llama ***estadística descriptiva****.*

La **estadística descriptiva** analiza series de datos (por ejemplo, edad de una población, ingresos familiares en una comunidad, altura de los estudiantes de una escuela, temperatura en los meses de verano, etc.) y trata de extraer conclusiones sobre el comportamiento de estas variables.

Como ya lo indicamos antes, una muestra sirve para hacer inferencias acerca del comportamiento de una población. Por lo tanto, la selección de una muestra representativa es un problema importante en la investigación estadística ya que ésta puede proporcionar una visión útil de la naturaleza de la población que se estudia, mientras que una muestra no representativa puede sugerir conclusiones totalmente erróneas sobre la población.

Por esto, es importante que la selección de las unidades de análisis que intervengan en la muestra no esté influenciada por cuestiones de conveniencia o favoritismo; es decir, la muestra no debe tener "sesgo". Regresamos al experimento de obtener una gota de sangre para medir la cantidad de glucosa. Si la muestra la tomamos en ayunas tendremos un resultado diferente a si tomamos la muestra después de comer. O por ejemplo si al realizar una encuesta de ocupación, tendremos resultados diferentes si solo entrevistamos a empleados de gobierno o a obreros de un sector industrial.

Una buena práctica es utilizar el azar. Las muestras seleccionadas en forma aleatoria son muestras probabilísticas. Existen algunas técnicas estadísticas diseñadas para diferentes situaciones. Una de estas técnicas son las muestras aleatorias simples, las cuales son seleccionadas de la población por medio de una tabla de números aleatorios o algunos medios similares.

Por ejemplo, si interesa medir la calidad del café que se produce en una comunidad y tenemos en almacén 1000 sacos listos para entrega y etiquetados, es claro que no vamos a estudiar la calidad de los 1000 sacos, es costoso y tardado, para esto obtenemos una muestra aleatoria de digamos 50 sacos, las tablas de números aleatorios nos indicaran los números de sacos que serían muestreados. Si no se tiene una tabla a la mano, se tendrían los mismos resultados con el apoyo de una calculadora de bolsillo o un directorio telefónico.

> *Una* ***muestra simple aleatoria*** *se obtiene cuando se seleccionan* ***n*** *elementos de una población, de manera que todas las combinaciones posibles de n elementos de la población tienen igual posibilidad de ser elegidas.*

Notas de clase R. Urbán

Se utilizan muestras y no se estudia la población total por cualquiera de las razones siguientes:

a) Recursos limitados
b) Datos disponibles limitados.
c) Prueba destructiva
d) Más exactitud

La limitación de los recursos (tiempo, dinero, etc.) desempeña siempre un papel importante que justifica el uso de muestras. Si la población es grande, el censo tiene un costo elevado y muchas veces, aunque económicamente se pudiera realizar, llevaría tanto tiempo que la información no resultaría de interés.

En algunos casos, independientemente de los recursos, sólo es posible contar con una muestra de la población. Por ejemplo, poner a prueba una máquina que se supone más eficiente que otras, para decidir si se compran unidades semejantes. El gerente de control de calidad sencillamente no puede esperar hasta observar la población completa de los productos de esta máquina, en lugar de ello, debe observar una muestra de productos de dicha máquina y basar su decisión en una inferencia que hace a partir de dicha muestra.

El muestreo puede implicar una prueba destructiva. Por ejemplo, suponga que se desea conocer el promedio de vida de los focos producidos por una fábrica determinada. Sería insensato esperar a que todos los focos se quemaran para conocer su promedio de vida.

Un censo no ofrece garantía absoluta de calidad. La observación de toda la población puede ser una tarea enorme que lleve a cometer muchos más errores que cuando se observa una muestra representativa. Por ejemplo, una gran cantidad de personal poco capacitado, para realizar un censo, puede cometer errores de medición que no cometería una menor cantidad de personal mejor capacitado.

### *9.6 Errores de las muestras*

En el análisis económico por muestreo, se pueden cometer dos tipos de error; los errores del muestreo y los ajenos al muestreo.

Los errores del muestreo se deben a diferencias entre los estadísticos, valores obtenidos de la muestra y los parámetros equivalentes de la población. En general entre más grande sea el tamaño de la muestra menor es el error.

Retomando el ejemplo de las encuestas de intención de voto, previas a una elección, puede suceder que la proporción de los votos obtenidos en la muestra quizás no sea representativa de la población, independientemente de lo bien dirigido y diseñado que haya sido el procedimiento de muestreo. En este caso, tendríamos una muestra de

Notas de clase R. Urbán

votantes “no representativa” de la población. Por ejemplo, si seleccionamos la muestra de un solo estrato de la población, estudiantes y dejamos fuera otros estratos, como los profesores. En todo caso, podríamos hacer inferencias solamente del comportamiento electoral del sector estudiantes.

Por otro lado, los errores no probabilísticos o errores ajenos al muestreo son los que resultan de falta de datos por ausencia de personas o un muestreo mal deseñado. Por ejemplo; para obtener una muestra de una población de votantes, es erróneo tomar los nombres de las personas, a incluir en la muestra, del directorio telefónico, puesto que serían excluidos los votantes que no poseen teléfono.

### *9.7 Recolección de datos*

Los datos se pueden obtener por observación o por experimentación. Si simplemente se observa la característica de interés sin intervenir en el proceso en estudio, se está ante un estudio observacional. En cambio, sí se interviene en el proceso en estudio imponiendo algún tratamiento en forma deliberada sobre las unidades de análisis a fin de observar las respuestas, se está ante un experimento.

Según el tipo de fuente, los datos pueden ser primarios o secundarios. Los **datos primarios** se recogen específicamente para el análisis deseado. Los **datos secundarios** ya se han compilado y están disponibles para el análisis estadístico.

La ventaja de usar datos secundarios para una investigación estadística es el ahorro en costo y tiempo, por ejemplo, la encuesta de Ingreso-Gasto que publica el INEGI[5]. Incluso la compra de los datos a una compañía comercial es por lo general menos costosa que obtener datos primarios. La desventaja asociada es que estas fuentes no siempre cubren las necesidades específicas del análisis y además no siempre son confiables. Esta es la razón por la que muchos investigadores prefieren obtener datos primarios orientados específicamente al asunto que se está investigando.

La principal técnica de recolección de datos es la encuesta. Se parte de un cuestionario que contiene las preguntas necesarias para obtener los datos de las variables de interés para nuestro estudio. En el diseño de este cuestionario es necesario tomar en consideración algunos criterios relacionados con su organización, las preguntas a plantear según los objetivos propuestos en la investigación y las características físicas de los formularios.

Se requiere experiencia para determinar qué técnica o combinación de técnicas se adecuan mejor a la tarea de obtener la información necesaria de las unidades de análisis.

[5] INEGI, Instituto Nacional de Estadística y Geografía.



Notas de clase R. Urbán

La clave para realizar una buena investigación reside, en gran medida, en el conocimiento del problema y en la elección de la técnica idónea.

Una vez que contamos con los datos de interés, el primer paso es, describir el conjunto de datos ya sea de la población o de la muestra. Los métodos usados para representar estos datos pueden ser de dos tipos: métodos gráficos y métodos numéricos.

Si está claro el objetivo de estudio y definida la o las poblaciones asociadas, se procede a la recolección de los datos (censo o muestra). Si el conjunto de datos es una muestra, en lo que sigue se estudian algunas de las técnicas más usadas para; la presentación de estos en forma ordenada (tablas y gráficos) y el cálculo de medidas o resúmenes.

Antes de analizar los datos es importante determinar primero si son cualitativos o cuantitativos, ya que se usan técnicas estadísticas distintas para cada uno de ellos, por lo que se pueden esperar resultados erróneos si se aplica una técnica inapropiada.

## *9.8 Clases.*

Es común que los elementos de una población, o muestra, se dividan en subconjuntos construidos a partir de un criterio determinado, esto con el fin de reducir el tamaño de las tablas de datos y para facilitar la lectura, el análisis y su interpretación. Esta división lleva a un reagrupamiento de los elementos de la población bajo estudio y la formación de diferentes clases de elementos que tienen características comunes. Por ejemplo, dada una población particular, con las edades de sus individuos, podemos formar las siguientes clases;

*Tabla 9.1 División de los datos en clases.*

| Clase 1 | Clase 2 | Clase 3 | Clase 4 | Clase 5 | Clase 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 – 19 años | 20 – 29 años | 30 – 39 años | 40 – 49 años | 50 – 59 años | 60 y más años |
| 130 | 210 | 340 | 310 | 260 | 140 |

Igualmente podemos formar clases a partir de diferentes criterios como, por ejemplo, edad y sexo, como, por ejemplo.

*Tabla 9.2 Clases de datos*

| Sexo | Edad (años) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0–19 | 20–29 | 30–39 | 40–49 | 50–59 | 60 y mas |
| Masculino | 70 | 115 | 200 | 175 | 190 | 81 |
| Femenino | 60 | 95 | 140 | 135 | 130 | 59 |
| Total | 130 | 210 | 340 | 310 | 260 | 140 |

Notas de clase R. Urbán

La división en clase de una población por uno o más criterios requiere de un conocimiento detallado del fenómeno bajo estudio, debido a que el estudio es muy sensible a los de los umbrales o límites de clase, pueden conducir a resultados distintos y por lo tanto diferentes interpretaciones.

***Ejercicios.***

1. *¿Qué tipo de variables son las siguientes?*
   1.1. *Número de integrantes de una familia.*
   1.2. *Religión de una persona*
   1.3. *Los estados de la república mexicana*
   1.4. *Número de acciones vendidas por día en la bolsa*
   1.5. *Remuneraciones de los obreros de una empresa*
   1.6. *Valor del PIB*
   1.7. *Grado académico de una persona*
2. *Explique ¿Qué entiende por población y por muestra?*
3. *Explique ¿características de un muestreo aleatorio?*
4. *Indique en los siguientes casos si se trata de un experimento determinista o un experimento aleatorio*
   4.1. *Lanzamiento de un dado.*
   4.2. *Valor de una cartera de acciones en bolsa.*
   4.3. *La suma de 10+5=15*
5. *Indique en los siguientes casos si la frase se refiere a una población o a una muestra.*
   5.1. *Estudiantes de la UNAM.*
   5.2. *Estudiantes de Economía de la UNAM*
   5.3. *Animales mamíferos.*
   5.4. *Vacas en un rancho*
   5.5. *Árboles de un bosque*
   5.6. *Árboles pino o caoba en el bosque*

Notas de clase R. Urbán

### *9.9 Distribuciones de frecuencia.*

Cualquier tratamiento, cualquier representación o análisis de un conjunto de datos relativos a un dato o variable de una población o muestra requieren que se presenten en una forma organizada que facilite su análisis. Supongamos que los ingresos anuales de un grupo de 70 personas de una comunidad son,

***Tabla 9.3.*** Ingresos de una comunidad (en miles de pesos)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5.7 | 4.7 | 5.4 | 5.2 | 4.1 | 2.5 | 4.2 |
| 6.8 | 16.6 | 4.1 | 10.6 | 6.2 | 3.6 | 2.1 |
| 5.7 | 5 | 6.3 | 8.9 | 10.5 | 5.4 | 5.8 |
| 2.8 | 11.6 | 2.6 | 6.1 | 2.8 | 4.1 | 4.3 |
| 5.7 | 5.5 | 28.6 | 3.2 | 4.1 | 3.9 | 13.1 |
| 3.4 | 3.8 | 4.6 | 4.4 | 4 | 4.9 | 3.5 |
| 5.6 | 4.2 | 5.6 | 3.9 | 5.1 | 6.6 | 11.2 |
| 4.5 | 5.8 | 2.1 | 3.8 | 2.5 | 5.5 | 6.1 |
| 9.3 | 27.2 | 3.4 | 4.9 | 7.9 | 5.4 | 6.9 |
| 13.5 | 3.7 | 7.6 | 4.2 | 19.3 | 4.3 | 3.6 |

Como primer paso, ordenamos la información del menor al mayor de los datos.

***Tabla 9.4****. Ingresos de la comunidad (ordenados)*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.1 | 3.5 | 4.1 | 4.6 | 5.5 | 6.1 | 10.5 |
| 2.1 | 3.6 | 4.1 | 4.7 | 5.5 | 6.2 | 10.6 |
| 2.5 | 3.6 | 4.1 | 4.9 | 5.6 | 6.3 | 11.2 |
| 2.5 | 3.7 | 4.2 | 4.9 | 5.6 | 6.6 | 11.6 |
| 2.6 | 3.8 | 4.2 | 5 | 5.7 | 6.8 | 13.1 |
| 2.8 | 3.8 | 4.2 | 5.1 | 5.7 | 6.9 | 13.5 |
| 2.8 | 3.9 | 4.3 | 5.2 | 5.7 | 7.6 | 16.6 |
| 3.2 | 3.9 | 4.3 | 5.4 | 5.8 | 7.9 | 19.3 |
| 3.4 | 4 | 4.4 | 5.4 | 5.8 | 8.9 | 27.2 |
| 3.4 | 4.1 | 4.5 | 5.4 | 6.1 | 9.3 | 28.6 |

***Número de clases.***

Para agrupar los datos formamos grupos de datos, por ejemplo, de acuerdo con el nivel de ingreso. Estos grupos estarán delimitados por intervalos de clase[6] y por lo tanto tendremos varios grupos e intervalos de clase, generalmente de la misma amplitud.

[6] Los Intervalo de clase son utilizados para dividir y resumir conjuntos de informaciones grandes con el objetivo de agrupar y realizar un mejor análisis de esta información.

Notas de clase R. Urbán

No tenemos una regla exacta que nos indique el número de intervalos de clase a utilizar. En general, se recomienda utilizar entre 5 y 20 intervalos dependiendo de la dispersión de la información. Si la información nos lo permite, podríamos utilizar un programa de cómputo para transcribir nuestros datos y realizar pruebas con diferentes intervalos de clase y así, analizar la dispersión de la información, y de acuerdo con los resultados utilizar un número de intervalos adecuado.

En la práctica, para encontrar el número $k$ de clases adecuado, se puede utilizar alguna de estas reglas como un método aproximado. En forma empírica se obtiene la raíz cuadrada del número de observaciones, para nuestro ejemplo,

$$\sqrt{N} = \sqrt{70} = 8.36$$

O bien, con la fórmula de Sturges[7], que se basa en el número de muestras que se pueden extraer de un conjunto de datos.

$$\boldsymbol{k = 1 + 3.322 log_{10}(n)}$$

En nuestro ejercicio el número de clases sería, $k = 1 + 3.322log_{10}(70) = 7.13$ se toma el valor del entero más cercano; entonces $k = 7$.
¿Cuál de estos métodos es el adecuado? Quizá la fórmula de Sturges al menos es la más utilizada.

Para la amplitud de los intervalos aplicamos una regla sencilla, obtenemos la diferencia entre el mayor y el menor de los datos y este resultado lo dividimos entre el número de intervalos de clase, o grupos de datos que deseamos formar.

$$Longitud\ de\ intervalo = \frac{28.6 - 2.1}{7} = 3.7857 \cong 3.8$$

En este ejercicio, los datos son todos números enteros, lo que nos ayuda a considerar una amplitud de intervalo de 3.8. De acuerdo con el tipo de datos, reales o enteros, las fronteras de clase o limites superior e inferior de cada clase, deben ser lo suficientemente claros para evitar ambigüedades; es decir, evitar en lo posible que los valores sean diferentes a las fronteras de clase. Si los datos son valores reales, tendríamos que utilizar amplitud de intervalos considerando las fronteras de los intervalos también números reales. En nuestro ejemplo, de acuerdo con la sugerencia de la fórmula de Sturges, vamos a utilizar 7 intervalos de clase.

Las fronteras de clase se determinan con el valor menor como límite inferior y el superior se obtiene al sumar al límite inferior la amplitud del intervalo. Es decir, el primer intervalo

Notas de clase R. Urbán

[7] Herbert Sturges propone en 1926 una regla práctica para encontrar el número aproximado de clases adecuado para elaborar un Histograma

seria, límite inferior 2.1 y el límite superior $2.1 + 3.8$, quedaría "2.1-5.9" para la segunda clase procedemos igual, pero iniciando con 5.9[8].

***Tabla 9.5***. *Tabla de frecuencias*

| Clase | Fronteras de clase | Marca de clase | Frecuencia de clase | Frecuencia relativa de clase | Frecuencia acumulada | Frecuencia relativa acumulada |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.1-5.9 | 4.0 | 49 | 0.700 | 49 | 0.700 |
| 2 | 5.9 - 9.7 | 7.8 | 11 | 0.157 | 60 | 0.857 |
| 3 | 9.7 – 13.5 | 11.6 | 6 | 0.086 | 66 | 0.943 |
| 4 | 13.5 – 17.3 | 15.4 | 1 | 0.014 | 67 | 0.957 |
| 5 | 17.3 – 21.1 | 19.2 | 1 | 0.014 | 68 | 0.971 |
| 6 | 21.1 – 24.9 | 23.0 | 0 | 0.000 | 68 | 0.971 |
| 7 | 24.9 – 28.7 | 26.8 | 2 | 0.029 | 70 | 1.000 |
| | | | 70 | 1 | | |

La tabla de frecuencias anterior nos sirve para ordenar los datos y disponerlos de manera que se muestren sus características y agruparlos en clases para su mejor observación.
En esta tabla vamos a mostrar los siguientes elementos, por columnas.

1. *Número de clase*
2. *Fronteras de clase*. Ya sea que se elija el número de intervalos de clase por medio de la fórmula de strurgles o algún otro que nos sea conveniente, construimos las frecuencias de clase empezando por la primera clase, el primer valor que se acostumbra a poner es el menor de los datos, seguido por la amplitud del intervalo. En nuestro caso, el límite inferior es 2.1 y el superior 2.1+3.8=5.9, el proceso se repite para las siguientes clases.
3. *Marca de clase*. Es el punto medio del intervalo. Se suman las fronteras de clase y el resultado se divide entre dos.
4. *Frecuencia de clase*. A partir de los datos ordenados se cuentan los valores que caen en cada intervalo de clase.
5. *Frecuencia relativa de clase*. Cada dato de la columna anterior se divide entre el número de observaciones.
6. *Frecuencia acumulada*. Es el numero acumulado de las frecuencias de clase, el segundo valor es la suma de los dos primeros, el tercero la suma con el anterior y así sucesivamente, la suma final es el número de observaciones.
7. *Frecuencia relativa acumulada*. Se obtiene igual a la anterior.

[8] Es una convención, aunque quizá la forma más adecuada sería respetar el tamaño de los intervalos sin modificar; sin embrago, debería de incluirse en el cuadro una nota aclaratoria que explique cómo serán tratados los datos si coinciden con las fronteras de clase. Otra posibilidad sería solamente aumentar con una décima en el límite. En nuestro ejemplo, 5.9+0.1 en el límite inferior, esto para evitar dudas en relación con los valores que pudieran coincidir con los límites de las fronteras de clase.

Notas de clase R. Padr

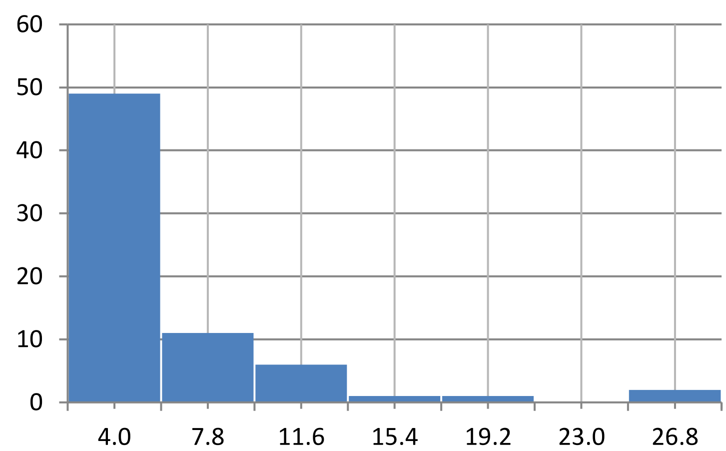
### 9.9.1 *Histograma.*

Es la única representación gráfica en forma de barras, utilizada para representar una variable de una distribución estadística. El histograma relaciona el tamaño de la población (frecuencias absolutas o relativas) y los valores tomados por elementos que componen esta población o muestra para una variable dada. El resultado es un gráfico que consiste en barras proporcionales al valor que representan, normalmente de cada clase. Siendo muy rigoristas estas barras no se separan, como lo hacen algunos programas de cómputo, como Excel.

Las alturas de los rectángulos son proporcionales a las frecuencias correspondientes de clases similares y distintas. Este método fue introducido por Karl Pearson[9].
Una distribución de frecuencias se presenta comúnmente en forma gráfica, ya sea utilizando las frecuencias absolutas o las relativas. En los dos casos la gráfica resultante es muy similar.

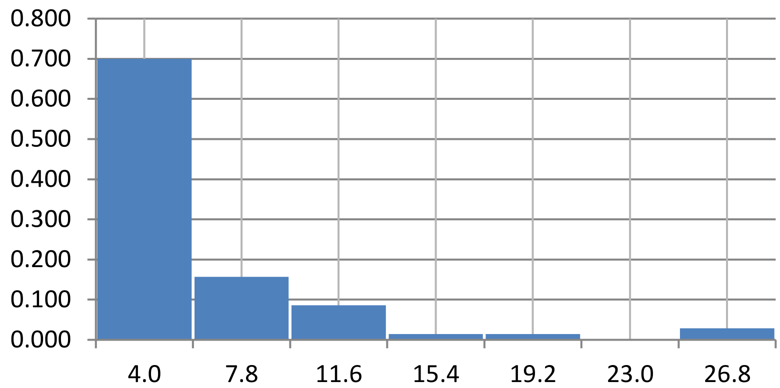
Si observamos el histograma de frecuencias relativas con mayor detalle, el porcentaje de la población correspondiente a la clase “1” son los que más bajo ingreso tienen; es decir, una persona elegida al azar de esta comunidad tendrá una probabilidad de 0.7 de tener este nivel de ingreso. Si esta muestra es representativa de la población o nos sirve para hacer inferencias de la población, entonces el 70% de la población tiene un nivel de ingreso entre $2,1 y $5,9 miles de pesos.

*Gráfica 9.1. Histograma de frecuencias*




[9] Karl Pearson, Matemático inglés, 1857- 1936. “Estableció la disciplina de la estadística matemática, su investigación colocó en gran medida las bases de la estadística del siglo XX, definiendo los significados de correlación, análisis de la regresión y desviación típica.” Fuente, https://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/6926/Karl%20Pearson

*Gráfica 9.2. Histograma de frecuencias relativas.*



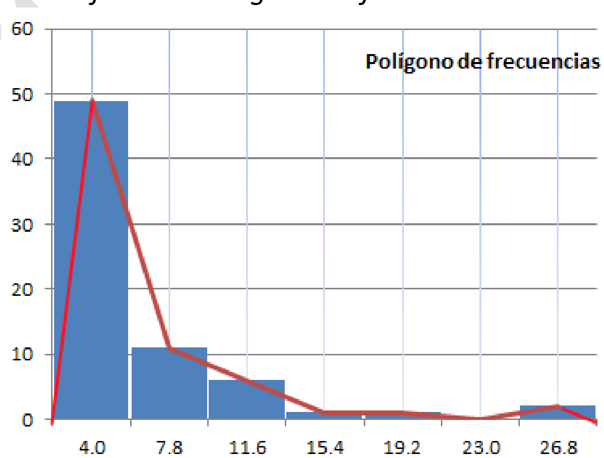

Es común llamar al Histograma de frecuencias relativas como ***distribución de frecuencias***, puesto que muestra como los datos se distribuyen en el eje de las abscisas, eje horizontal.

### *9.9.2 Polígono de frecuencias*

Otra forma de representación gráfica de la distribución de frecuencias absolutas o relativas es el **polígono de frecuencias**. Si se considera una distribución de frecuencias con intervalos de clase de igual amplitud, el polígono está referido a un sistema coordenado donde cada vértice tiene por abscisa el punto medio del intervalo y por ordenada la frecuencia del intervalo de clase.

Para los puntos de inicio y fin del polígono, se traza un segmento que va de la base del primer intervalo, al punto medio superior de esta barra y al final del polígono se traza un nuevo segmento del centro superior de la última barra a la base.

*Gráfica 9.3. Polígono de frecuencias*

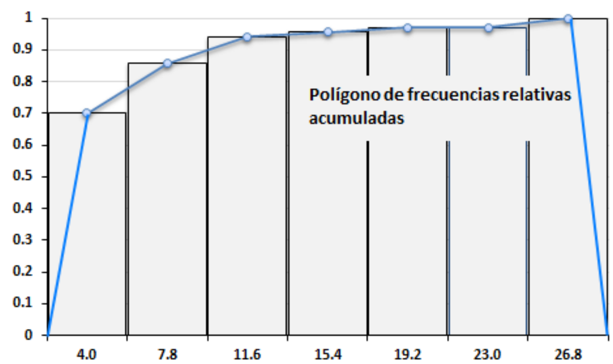



Notas de clase R. Urban

Otra posibilidad es añadir dos intervalos de clase (uno anterior al primero y otro posterior al último) de igual amplitud a los restantes y de frecuencia cero. Se puede demostrar, mediante igualdad de triángulos, que el polígono resultante es igual al área del histograma.

Finalmente, la gráfica de frecuencias relativas acumuladas. Consiste en representar la gráfica de una función que una por segmentos las alturas correspondientes a los extremos superiores de cada intervalo, la altura es igual a la frecuencia acumulada, se acostumbra a iniciar con una altura de cero al primero y el último intervalo, aunque no es una regla.

*Grafica 9.4. Polígono de frecuencias relativas acumuladas*




Elegir el número de clases, no es una tarea automática, siempre es recomendable probar con diferentes intervalos. Se recomienda utilizar no menos de 5 intervalos y no más de 20. Se recomienda es obtener el histograma de acuerdo con la fórmula de Sturges y si no muestra suficientemente la distribución de los datos, probar con otros intervalos.

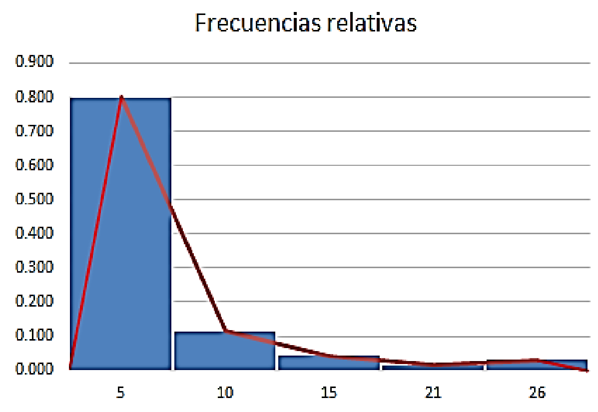
Si elegimos 5 intervalos de clase, el proceso es similar

$$Longitud\ de\ intervalo = \frac{28.6 - 2.1}{5} = 5.3$$

*Tabla 9.5 Tabla de frecuencias para 5 clases*

| Clase | Fronteras de clase | Marca de clase | Frecuencia de clase | Frecuencia relativa de clase | Frecuencia acumulada | Frecuencia relativa acumulada |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.1 - 7.4 | 4.75 | 56 | 0.8 | 56 | 0.80 |
| 2 | 7.4 – 12.7 | 10.05 | 8 | 0.114 | 64 | 0.914 |
| 3 | 12.7 – 18.0 | 15.35 | 3 | 0.043 | 67 | 0.957 |
| 4 | 18.0 – 23.3 | 20.65 | 1 | 0.014 | 68 | 0.971 |
| 5 | 23.3 – 28.6 | 25.95 | 2 | 0.029 | **70** | **1** |
| | | | 70 | 1 | | |

Gráfica 9.6. histograma de Frecuencias relativas




Como se observa, gráfica 9.6, el 80% de la población tiene un ingreso comprendido entre \$2.1 y \$7.4 miles de pesos.

En resumen, para construir una gráfica de distribución de frecuencias seguimos los siguientes pasos:

1) Determinar el número de intervalos de clase. Se recomienda seleccionar entre 5 y 20 intervalos. En general, entre más datos más intervalos. Si al seleccionar este número se tienen demasiados intervalos vacíos que resten significado a la distribución se puede reducir el número de intervalos, con el riesgo de ocultar características importantes de la distribución.
2) Determinar el tamaño de los intervalos. La regla es, dividir la diferencia entre el mayor menos el menor de las observaciones, entre el número de intervalos. Todas las clases deben tener la misma longitud, excepto si así lo desea la primera y la última
3) Determinar las fronteras de clase. Deberá tener cuidado de incluir en el primer intervalo al menor de las observaciones y deberá seleccionar las fronteras de estos intervalos de manera que ninguna observación coincida con alguna frontera de clase.

### *9.10 Medidas descriptivas de una distribución.*

Las representaciones gráficas son útiles para lograr una representación rápida y clara de las características de las observaciones de un modelo. Sin embargo, en algunas situaciones es mejor resumir la información en un número o bien necesitamos hacer inferencias a cerca de parámetros de la población que requieren de datos puntuales. En otros casos, pudiera pasar que los histogramas de la muestra y de la población sean diferentes y tal pareciera que no podemos hacer inferencias de la población ya que los histogramas difieren.

Notas de clase R. Urbán

Estos problemas pueden salvarse con el uso de medidas descriptivas numéricas. Para distinguir entre parámetro y estadístico, utilizamos letras griegas para los primeros y latinas para los segundos.

Dependiendo de los datos con los que contemos, podemos calcular estas medidas descriptivas. Si solamente contamos con una tabla estadística, entonces las medidas que obtenemos se dicen que son para datos agrupados. Por lo contrario, si contamos con una lista de todas las observaciones de la muestra entonces usaremos las fórmulas para datos no agrupados. En todo caso la medida numérica deberá ser muy similar.

### *9.10.1 Medidas de tendencia central. Para datos no agrupados*[10]

Las medidas de tendencia central permiten resumir un conjunto de datos relacionados con una variable cuantitativa. Se llaman también de centro de gravedad y están determinadas por un valor central alrededor del cual los datos tienden a unirse. Las principales medidas de tendencia central son; la media, la mediana y la moda.

#### *9.10.1.1 Media aritmética* $(\overline{x})$.

Es la más simple y la más comúnmente utilizada, también llamada media empírica. Para un grupo de observaciones $\boldsymbol{n}$, $x_1,\ x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ es igual a la suma de las observaciones dividida entre $n$, para datos no agrupados.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Por ejemplo, si tenemos el siguiente grupo de datos que corresponden al ingreso diario de un grupo de jornaleros agrícolas.

$$85, 37, 48,68,73,54,104, 92, 85, 95$$

El promedio aritmético es entonces

$$\bar{x} = \frac{85 + 37 + 48 + 68 + 73 + 54 + 104 + 92 + 85 + 95}{10} = \frac{741}{10} = 74.1$$

Se puede utilizar este valor para estimar, por ejemplo, el ingreso total de un grupo de 200 jornaleros para estimar el costo diario de, por ejemplo, la pizca de algodón en una parcela del noroeste de México

$$Total = (200) * 74.1 = 14{,}820$$

10 Datos Agrupados son los que se encuentran agrupados en una tabla de frecuencia.Los Datos No Agrupados serán aquellos que carecerán de frecuencia no estan organizados en clases.

Notas de clase R. Urbán

Esta es la forma general, algunos autores sugieren formas alternativas derivadas de la forma general. Una de estas sugiere calcular el promedio; multiplicando cada valor por el número de veces que se repite. La suma de todos estos productos se divide por el total de las observaciones, es decir:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{n}$$

Donde $x_i$ es el valor de la observación, $m_i$ el número de veces que se repite y $n$ el tamaño de la muestra. Esta forma es útil cuando tenemos un número grande de observaciones que están ordenadas.

El resultado es el mismo anterior, pero quizá más rápido, dependerá de la longitud de la serie y el número de datos que se repiten. Para el ejemplo anterior tendríamos,

$$\bar{x} = \frac{37 + 48 + 54 + 68 + 73 + (85 * 2) + 92 + 95 + 104}{10} = \frac{741}{10} = 74.1$$

### *9.10.1.2 Media aritmética ponderada.*

El promedio aritmético ponderado, se utiliza cuando no todos los valores tienen la misma importancia en relación con el resultado final. Al introducir el peso de un término puede ser útil en situaciones, especialmente cuando los individuos en una población no tienen el mismo peso. En el caso de un promedio ponderado, se asigna una ponderación a cada uno de los valores.

En la práctica se trata de otorgar a cada observación $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots \dots, x_n$ un peso $w_1, w_2, w_3, w_4, \dots \dots, w_n$, de acuerdo con la importancia de cada elemento.

$$\overline{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{x_1 w_1 + x_2\, w_2 + x_3 w_3 + x_4 w_4 + \cdots + \, x_n w_n}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \cdots \dots + w_n,}$$

Esta medida tiene muchas aplicaciones económicas y suele utilizarse para el cálculo de índices; de precios, cantidades, valor, o como el del consumidor en los que otorga peso a los bienes, tortilla, pan, fruta, vivienda, etc., por ejemplo,

Se desea obtener el precio promedio, en kg, de un grupo de artículos,

| Precio (kg) | Cantidad (kg) |
|---|---|
| $11.5 | 3 |
| $ 24.0 | 2 |
| $ 16.5 | 4 |
| $ 13.5 | 6 |
| $ 16.25 | 5 |

Notas de clase R. Urbán

Para calcular este valor tendremos,

$$\overline{x}_p = \frac{11.5(3) + 24(2) + 16.5(4) + 13.5(6) + 16.25(5)}{3 + 2 + 4 + 6 + 5} = \frac{310.75}{20} = \$15.53$$

El precio promedio del grupo de artículos es de $ 15.53 pesos

### *9.10.1.3 Media geométrica $\overline{x}_G$.*[11]

El cálculo de la media geométrica es laborioso; sin embrago, su aplicación es muy amplia en la Ciencia económica ya que sirve para mostrar cambios porcentuales en la variable de interés; como por ejemplo para obtener tasas de crecimiento porcentual promedio. Para lograr esta medida es necesario obtener la raíz enésima de la multiplicación de todas las observaciones.

$$\boldsymbol{\overline{x}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * x_3 *, \ldots x_i * \ldots x_n}}$$

Para los datos del ejercicio de los jornaleros agrícolas, tenemos,

$$\boldsymbol{\overline{x}_G} = \sqrt[10]{37 * 48 * 54 * 68 * 73 * 85 * 85 * 92 * 95 * 104} = \mathbf{70.71}$$

En algunos casos, la media aritmética y la media geométrica pueden ser iguales.

La media geométrica es de utilidad porque considera todos los valores de la distribución y es menos sensible que la media aritmética a los valores extremos. Es adecuada para calcular variables en porcentajes, como tasas medias anuales, , índices o razones en el tiempo, en lugar de sumarlos.

Una de las principales ventajas de la media geométrica es que es menos sensible a valores extremos, muy grandes o pequeños, siempre que todos sus elementos sean positivos y diferentes de cero; por el contrario, cuando algún valor es cero, la media geométrica se anula lo mismo si un dato es negativo, o una cantidad impar de ellos.

***Ejemplo.*** Cuál sería el porcentaje promedio del Índice Nacional de Precios al consumidor INPC, para la siguiente serie de datos.

---

[11] Una fórmula alternativa de cálculo es con la suma de los logaritmos $\bar{x}_G = 10^{\frac{\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)}{n}}$

Notas de clase R. Urbán

*Tabla 9.10 Índice Nacional de Precios al consumidor INPC (variación porcentual en la primera quincena de noviembre)*

| Año | INPC |
|---|---|
| **2013** | 0.85% |
| **2014** | 0.74% |
| **2015** | 0.52% |
| **2016** | 0.77% |
| **2017** | 0.92% |

FUENTE. INEGI

No es recomendable utilizar la media aritmética porque los datos están expresados en porcentaje y no en valores absolutos; por lo tanto usaremos la media geométrica,.

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{G}} = \sqrt[5]{(1+\frac{0.85}{100}) * (1+\frac{0.74}{100})(1+\frac{0.52}{100})(1+\frac{0.77}{100})(1+\frac{0.92}{100})} = \sqrt[5]{\mathbf{1.0385}}$$

$$= \mathbf{1.0075}\ (\mathbf{0.75}\%)$$

El porcentaje promedio del INPC entre 2013-2017 es de 0.75%

Finalmente, la media geométrica es de utilidad en el caso de variables positivas y que presentan una evolución geométrica, como la población; por ejemplo, para el cálculo de tasas de crecimiento medio.

En el análisis financiero, si una variable crece en $n$ periodos a una cierta tasa de crecimiento. Por ejemplo, si una inversión crece a una tasa de crecimiento media anual de 6, 6.5, 7, 8, 9, en 5 años, la tasa de crecimiento anual sería,

$$i = \sqrt[5]{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)(1+i_4)(1+i_5)} - 1$$
$$= \sqrt[5]{(1+.06)(1+.065)(1+.07)(1+.08)(1+.09)} - 1$$
$$= \sqrt[5]{(1.06)(1.065)(1.07)(1.08)(1.09)} - 1$$
$$= \sqrt[5]{1.422} - 1 = 0.073$$

La tasa de crecimiento anual de la inversión sería de 7.3%

Notas de clase P. Urbán

### *9.10.1.4 Media geométrica ponderada $\overline{G}_p$.*

Al igual que en una media aritmética pueden introducirse pesos como valores multiplicativos para cada uno de los valores con el fin de ponderar o hacer pesar más en el resultado final ciertos valores, en la media geométrica pueden introducirse pesos como exponentes:

$$\overline{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{p}} = \left(x_1^{w_1} * x_2^{w_2} * x_3^{w_3} * \dots * x_n^{w_n}\right)^{1/\sum w_i}$$

Por ejemplo, si utilizamos este cálculo para obtener el precio promedio de los artículos para los datos del problema anterior tendríamos,

$$\overline{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{p}} = (11.5^3 * 24^2 * 16.5^4 * 13.5^6 * 16.25^5)^{1/(3+2+4+6+5)} = \$\ 15.22$$

Si todos los pesos son iguales, la media geométrica ponderada es la misma que la geométrica.

Este cálculo también puede ser influido por valores extremos, que se aparten en exceso del resto de la serie. Estos valores anómalos podrían condicionar en gran medida el valor de la media, perdiendo esta representatividad.

### *9.10.1.5 Mediana* $(\mathbf{M_e})$

La mediana es la medida de la tendencia central que parte en dos la serie de datos. Etimológicamente significa mitad; entonces, este valor corresponde realmente a la mitad de una distribución. Es la observación que cae en el centro cuando las observaciones se ordenan, en orden creciente. En otras palabras, es el valor que separa una distribución ordenada en dos grupos que contienen la misma cantidad de datos.

Para el cálculo de la mediana es necesario que los datos estén ordenados, del menor o del mayor. En el ejercicio anterior, ingreso de jornaleros agrícolas, se ordenan los datos.

$$37, 48, 54, 68, 73, 85, 85, 92, 95, 104$$

Si el número de observaciones es par, como en nuestro ejemplo, se escoge como mediana al valor medio entre las dos observaciones que disputan la medianía.

$$M_e = 79\ el\ punto\ medio\ entre\ \ 73\ y\ 85.$$

Cuando el número de observaciones es non, solo elegimos la observación que está a la mitad de la serie.



Notas de clase R. Urbán

La mediana $M_e$ no tiene el problema de estar influido por los valores extremos, pero en cambio no utiliza en su cálculo toda la información de la serie de datos (no pondera cada valor por el número de veces que se ha repetido).

En aplicaciones económicas es particularmente útil esta medida. En ocasiones la media no nos explica adecuadamente cómo se comportan las variables económicas, como el ingreso. En el ejercicio anterior, ingreso familiar en una comunidad, podemos calcular el valor de la media, con la ayuda de una computadora, por ejemplo y obtendremos el valor

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{(2.1 + 2.1 + 2.5 + \cdots . +28.6)}{70} = 6.43$$

Mientras que la mediana es de $M_e = 5.05$, la mediana nos da un valor diferente a la media, lo que nos indica un ingreso más bajo que el promedio.

### *9.10.1.6 Moda* ($\mathbf{M_0}$)

En un conjunto de observaciones, la moda es el valor que más se repite en una distribución o el valor que ocurre con más frecuencia. Si continuamos con nuestro ejercicio de ingresos por día de jornaleros agrícolas, donde

| |
|---|
| 37 |
| 48 |
| 4 |
| 68 |
| 73 |
| 85 |
| 85 |
| 92 |
| 95 |
| 104 |
| |

El valor que más se repite es 85 por lo tanto, la moda es

$$\boldsymbol{M_0 = 85}$$

Cuando un valor se repite con más frecuencia, le llamamos una ***distribución unimodal***; si tuviésemos dos valores con la misma frecuencia, sería una ***distribución bimodal*** y así sucesivamente.

En algunos casos, la moda no es suficiente para caracterizar y resumir los datos de una variable. En este ejercicio, el ingreso familiar que más se repite es 85, mientras que el ingreso promedio es de 6.43. Es claro que difieren y pareciera que el ingreso de las familias pudiera ser mayor que el que obtenemos con el promedio, más aún cuando las diferencias entre el mayor y el menos de los datos es amplia.

La moda es la única medida de tendencia central que puede ser utilizada para datos tanto cualitativos como cuantitativos

Notas de clase R. Urbán

### *9.10.2 Medidas de dispersión o de variación.*

Como su nombre indica, estas medidas nos indican que tan dispersos estan los datos, o se concentran alrededor de la media. Cuando mas grande su valor, mayor sera la variación; por lo contrario si el valor es pequeño habrá una concentración de los datos alrededor de la media.

Las medidas de concentración mas usuales son; el recorrido, los cuartiles, la varianza y la desviación estándar.

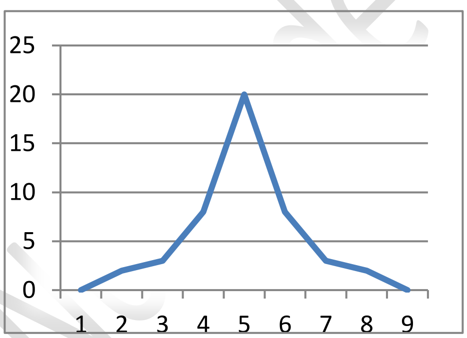
#### *9.10.2.1 Recorrido*.

También llamado ***rango***, es la medida de dispersión mas simple. Se obtiene como la diferencia entre la mayor y la menor de las observaciones.

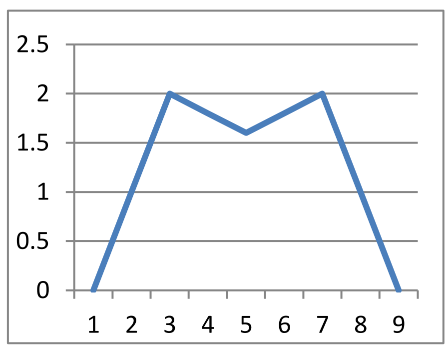
Desafortunadamente, el recorrido no resulta satisfactorio como medida de variación ya que solo intervienen los valores extremos. No nos explica la disperción de las observaciones intermedias.

Si analizamos dos distribuciones, ambas con el mismo recorrido, como se muestra en las gráficas siguientes, la distribución del lado derecho nos muestra más variación de los datos que la del lado izquierdo.

*Gráfica 9. Recorrido con concentración*




*Gráfica 9.*Recorrido con datos dispersos




El rango es una medida insuficiente para evaluar la dispersión de los datos. Otras medidas que pueden salvar esta dificultad son los cuartiles y los percentiles.

#### *9.10.2.2 Cuartiles, deciles y percentiles.*

***Los Cuartiles***, son 3 valores que dividen la serie de datos, ordenada de forma creciente o decreciente, en cuatro tramos iguales, en los que cada uno de ellos concentra el 25% de los resultados. Los cuartiles son valores calculados, no observaciones en los datos.

El ***primer cuartil*** es aquel que deja a la izquierda ¼ de las observaciones y es menor que ¾ de las observaciones. El ***segundo cuartil*** es la mediana y el ***Tercer cuartil***, sobrepasa ¾ de las observaciones. A menudo es necesario interpolar[12] entre dos observaciones para "afinar" el valor de un cuartil con exactitud. Para encontrar estos valores usamos la formula siguiente,

$$\frac{k(n+1)}{4}$$

Donde $k$ es el número de cuartil y $n$ el tamaño de la muestra.

En nuestro ejemplo, tenemos 10 observaciones. El primer cuartil es el valor correspondiente a la $\frac{n+1}{4}$ observación ordenada; 2.75. El valor se localiza entre los valores 48 y 54. Si utilizamos la fórmula de interpolación lineal tendremos,

$$y = 48 + \frac{2.75-2}{3-2}(54-48) = 52.5 \qquad Q_1 = 52.5$$

| No. observación | $y_i$ |
|---|---|
| 1 | 37 |
| **2** | **48** |
| **3** | **54** |
| 4 | 68 |
| ***5*** | ***73*** |
| ***6*** | ***85*** |
| 7 | 85 |
| 8 | 92 |
| 9 | 95 |
| 10 | 104 |

El segundo cuartil es la mediana $\frac{2(n+1)}{4} = \frac{11}{2} = 5.5$. De forma similar, el quinto valor más la mitad de la diferencia entre 85 y 73

$$Q_2 = 79$$

Finalmente, el tercer cuartil se ubica entre $\frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(10+1)}{4} = 8.25$, la observación 8 más el 25% de la diferencia entre los valores 92 y 95

$$Q_3 = 92.75$$

***Deciles**,* son 10 valores que distribuyen la serie de datos, ordenada de forma creciente o decreciente, en diez tramos iguales, en los que cada uno de ellos concentra el 10% de los resultados.

En la Ciencia económica, por ejemplo, en la encuesta de ingreso gasto, los deciles se utilizan para definir sectores socioeconómicos según el ingreso por familia, es decir, según el total de dinero **que** aporta el o los integrantes de un hogar, dividido por el número de miembros de estrato socioeconómico.

$$\frac{dn}{10}$$

Notas de clase R. Urbán

[12] La interpolación lineal se utiliza para estimar los valores que toma una función en un intervalo $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$. Para estimar un valor intermedio aproximando una función lineal, recta, de ahí el nombre de interpolación lineal. Para encontrar el valor de y en un punto *(x, y)*. $y = y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2 - y_1)$

Donde $d$ es el número de decil y $n$ el tamaño de las observaciones.

En nuestro ejercicio, la observación donde se localiza el cuarto decil sería,

$$\frac{4 * 10}{10} = 4$$

Es el valor que correspondería a la cuarta observación 68.

***Percentiles***, son 99 valores que distribuyen la serie de datos en 100 partes iguales, ordenada de forma creciente o decreciente, en cien tramos iguales, en los que cada uno de ellos concentra el 1%, 2% … 99% de los resultados. Similar a los deciles tendríamos

$$\frac{pn}{100}$$

Donde $p$ es el percentil en porcentaje

Así, el percentil del 75% de nuestro ejercicio es

$$\frac{75 * (10)}{100} = 7.5$$

Este valor, se ubica en la séptima observación más la mitad de la diferencia entre la 7ª y 8ª observación, 88.5

Cuando un cuartil se ubica en un valor repetido, se toma la observación que corresponda, sin importar la repetición.

La utilización de los cuartiles (y los deciles) mejoran la caracterización y análisis de la dispersión de una distribución. Además, permiten comparar de forma más segura y relevante dos distribuciones o incluso la distribución de la misma población en dos fechas diferentes para la misma variable. Sin embrago, en estos casos, cuartiles, deciles y percentiles no son propiamente medidas de dispersión.

***Recorrido intercuartílico***

El recorrido intercuartílico si nos da una mejor medida de variabilidad, en comparación con el recorrido. Se obtiene al restar el valor del tercer cuartil menos el primero.

$$Q_3 - Q_1 = \$92.75 - \$52.5 = \$40.25$$

Notas de clase R. Urbán

### 9.10.2.3 Varianza y desviación estándar

Las medidas de tendencia central: especificamente, la media y la mediana, indican el centro de gravedad de la distribución. La varianza, es una medida de la dispersión, que indica que tanto se separan los datos, o se concentran, alrededor de la media. Tomemos ahora la diferencia entre este valor central y cada valor de la distribución, es decir,

$$(x_i - \overline{x})$$

De esta simple relación, podemos ver que mientras más cerca estén los datos de la media, o más lejanas, la suma de las diferencias será pequeña o grande,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$$

Es claro, que algunas sumas son positivas y otras negativas, las observaciones posteriores o anteriores a la media. De esta manera para evitar que esta suma sea nula elevamos al cuadrado la suma de las diferencias

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Finalmente, la varianza de la población mide la distancia existente entre las $N$ observaciones de la serie y la media. Se calcula como sumatorio de las diferencias al cuadrado entre cada valor $x_i$ y la media μ. El símbolo utilizado para la varianza de la población es $\sigma^2$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

Utilizamos letras mayúsculas *N*, para indicar el número de elementos de la población. Comúnmente no contamos con el total de elementos y solo disponemos de una muestra de las observaciones, en este caso ***la varianza de la muestra*** deberá calcularse como la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones con respecto a su media y dividida entre *(n-1)*, de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}{n}}{n-1}$$

La varianza siempre será mayor que cero. Mientras más se aproxima a cero, más concentrados están los valores de la serie alrededor de la media. Por el contrario, mientras mayor sea la varianza, más dispersos están. Sin embargo, la varianza propone un

Notas de clase R. Urbán

resultado elevado al cuadrado. Para regresar a la unidad original de medición, se calcula la raíz cuadrada, Esta nueva medida de dispersión será la ***desviación estándar.***

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}} \ o\ bien\ para\ la\ muestra \quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Algunas propiedades de la varianza y la desviación estándar son las siguientes;

- Se expresa en las mismas unidades que la variable. Si los datos son mediciones en *cm*, la varianza y la desviación estándar también se expresan en *cm*.
- Una desviación estándar baja significa que los valores están relativamente concentrados alrededor de la media y son homogéneos. Por lo contrario, un valor elevado de la desviación estándar nos indica que tanto los datos están dispersos alrededor de la media
- La desviación estándar, también es un valor que nos sirve para determinar qué proporción de una población está concentrada alrededor de la media. Tomando como punto de referencia la media y la desviación estándar como una unidad de distancia de la población. En condiciones estadísticas ideales, donde la población está perfectamente distribuida alrededor de sus medidas de tendencia central, después recuperaremos y demostraremos estos resultados por el *teorema de Chebyshev*[13].

***Teorema de Chebyshev***

El teorema de Chebyshev, o desigualdad de Chebyshev, establece que al menos el 75% de los datos se encuentran a menos de dos desviaciones estándar de la media sin importar el tipo de distribución y es una herramienta útil para evaluar la dispersión de los datos.

El teorema establece las siguientes fronteras de la distribución;

| | |
|---|---|
| $[\mu - \sigma; \overline{\mu} + \sigma]$ | *A una desviación estándar de la media se encuentra el 68.3% de las observaciones* |
| $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ | *A dos desviaciones estándar de la media se encuentran el 95.5% de las observaciones y* |
| $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ | *A tres desviaciones estándar está el 99.7% de las observaciones* |

[13] Pafnuti Chevyshov o Chebyshev, 16 mayo de 1821 - 1894. Matemático ruso, nacido en Okátovo Rusia, es conocido principalmente por la desigualdad que lleva su nombre.



Notas de clase R Urbán

En la primera columna de la tabla, las expresiones que se muestran son un intervalo de confianza. En términos probabilísticos esta desigualdad de Chebyshev nos dice la probabilidad mínima de que el parámetro poblacional se encuentre a un número determinado de desviaciones estándar por encima o por debajo de su media. Es decir, la probabilidad de que un parámetro este en ese intervalo de confianza.

Para el ejemplo anterior, para una población de 200 trabajadores que reciben un jornal diario como en el ejemplo anterior,

| **Variable** | **Frecuencias absolutas** | | **Frecuencias relativas** | |
|---|---|---|---|---|
| **(Jornal diario $)** | **Simple** | **Acumulada** | **Simple** | **Acumulada** |
| 37 | 44 | 44 | 0.22 | 0.22 |
| 48 | 35 | 79 | 0.18 | 0.40 |
| 54 | 32 | 111 | 0.16 | 0.56 |
| 68 | 26 | 137 | 0.13 | 0.69 |
| 73 | 24 | 161 | 0.12 | 0.81 |
| 85 | 15 | 176 | 0.08 | 0.88 |
| 92 | 10 | 186 | 0.05 | 0.93 |
| 95 | 8 | 194 | 0.04 | 0.97 |
| 104 | 6 | 200 | 0.03 | 1.00 |
| TOTAL | 200 | | | |

De inicio, el rango, diferencia entre el valor de la observación mayor $(104)$ y la menor $(37)$, es de *$67*.

La media de el jornal de los trabajadores es,

$$\mu = \frac{37 * 44 + 48 * 35 + 54 * 32 + 68 * 26 + 73 * 24 + 85 * 15 + 92 * 10 + 95 * 8 + 104 * 6}{200} \cong 60.68$$

Luego, calculamos la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{200}[(37 - 60.68)^2 * 44 + (48 - 60.68)^2 * 35 + (54 - 60.68)^2 * 32 + \cdots + (104 - 60.68)^2 * 6] = 380.64$$

Por lo tanto, si la varianza es $380.64, la desviación estándar $\sigma = \sqrt{380.64} = \$19.51$ , que corresponden a valores calculados del jornal diario para 200 trabajadores agrícolas.



Notas de clase R. Urbán

En condiciones estadísticas ideales, de acuerdo con Chebyshev, en los intervalos siguientes:

| | |
|---|---|
| $[41.17; 80.19]$ | Tendríamos el 68.3% de las observaciones |
| $[21.66; 99.7]$ | Tendríamos el 95.5% de las observaciones |
| $[2.15; 119.21]$ | Tendríamos el 99.7% de las observaciones |

#### *9.10.2.4 Coeficiente de variación de Pearson*[14]

El coeficiente de variación es un valor, se suele expresar en porcentaje, que sirve para comparar el nivel de dispersión de dos o más variables. Esto no ocurre con la desviación estándar, ya que viene expresada en las mismas unidades que los datos de la serie.

Por ejemplo, para comparar el nivel de dispersión de una serie de datos de la altura de los alumnos de una clase y otra serie con el peso de dichos alumnos, no se puede utilizar las desviaciones estándar (una viene vienes expresada en $cm$ y la otra en $kg$). En cambio, sus coeficientes de variación son ambos porcentajes, por lo que sí se pueden comparar.

Se calcula como cociente entre la desviación estándar y la media.

Para la población, $CV = \frac{\sigma}{\mu}$
y para la muestra $cv = \frac{s}{\bar{x}}$

$$CV = 19.51/60.68 = 0.3215$$

Si el valor de la media es pequeño, cercano a cero, el coeficiente de variación tenderá a ser grande lo que supondría una mayor variabilidad de los datos, que no necesariamente puede ocurrir.

Mientras más pequeño sea el ***coeficiente de variación***, o más se aproxime a cero, nos indicara el grado en que los datos se compactan alrededor de la media. Cuando el valor se separa de cero mayor será la dispersión. Si la variable es positiva, el valor máximo que puede tomar el coeficiente es $\sqrt{n-1}$

El cálculo del coeficiente de variación de Pearson es el mismo ya sea que se trate de una población o de una muestra.

[14] No es recomendable su utilización cuando el valor de la media es cercano a cero.



Notas de clase R. Urbán

### *9.10.3 Cálculos para datos agrupados*

Es común encontrarse con datos que solo están disponibles agrupados en intervalos de clase, como por ejemplo datos proporcionados por el gobierno o agencias de información. En estas formas de datos, no tenemos una lista de todas las observaciones; pero si conocemos el número exacto de observaciones que caen en cada intervalo de clase. Cuando esto ocurre no es posible calcular media y varianza de la muestra, por los métodos definidos hasta ahora.

El método alternativo de cálculo se basa en la suposición de que el punto medio de cada clase es aproximadamente igual a la media aritmética de las medias contenidas en el intervalo. Este punto medio es conocido como ***marca de clase,*** lo llamaremos $m_i$.

#### *9.10.3.2 Media, Mediana y moda*

La ***Media aritmética*** para datos agrupados, se obtiene a partir de las marcas de clase, o punto medio de cada intervalo, y este resultado se multiplica por la frecuencia de clase y finalmente se divide entre el tamaño de la muestra o la población, según el caso.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i m_i}{n}$$

En donde $m_i$ es la marca de clase $i$, punto medio del intervalo, y $fi$ es la frecuencia absoluta de las observaciones en la clase $i$, $n$ es el total de las observaciones.

La ***Media geométrica***[15] para datos agrupados se obtiene con la siguiente regla,

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n_c} {m_i}^{f_i}}$$

De la misma manera, *m*i es la marca de clase *i*, punto medio del intervalo, y $f_i$ es la frecuencia absoluta de las observaciones en la clase *i*, *n* es el total de las observaciones y $n_c$ el número de clases.

La ***mediana*** se ubica en el intervalo de clase que corresponde a la mitad del total de las frecuencias, es decir el intervalo para $n/_2$. Se obtiene, de acuerdo con la siguiente regla,

---

[15] Una fórmula alternativa de cálculo es con la suma de los logaritmos. $\bar{x}_G = 10^{\frac{\sum_{i=1}^{n} \log(m_i f_i)}{n}}$



Notas de clase R. Urbán

$$M_e \cong L_m + \frac{(\frac{n}{2} - F_{m-1})}{f_m} a_m$$

En este caso, $L_m$ es el límite inferior de la clase donde está la mediana; $F_{m-1}$ frecuencia acumulada hasta la clase anterior al de la mediana; $f_m$ frecuencia de la clase de la mediana y $a_m$ la amplitud de la clase que corresponde a la mediana.

De igual manera, para el cálculo de la ***moda***, ésta se ubica en el intervalo de clase con la mayor frecuencia, que llamaremos intervalo modal. Después, seguimos la siguiente regla,

$$Mo = L_{m_o} + \frac{f_{m_o} - f_{m_o-1}}{\left(f_{m_o} - f_{m_o-1}\right) + \left(f_{m_o} - f_{m_o+1}\right)} a_{m_o}$$

En este caso, $L_{m_o}$ es el límite inferior de la clase modal, $f_{m_o}$ frecuencia de la clase modal, $f_{m_o-1}$ frecuencia de la clase anterior a la moda, $f_{m_o+1}$ frecuencia de la clase posterior y finalmente, $a_{m_o}$ amplitud de la clase modal.

### *9.10.3.2 Cuartiles, desviación estándar y varianza*

Para el cálculo de estas, los datos deben estar ordenados en intervalos, de mayor a menor. El cálculo se realiza en dos pasos, primero se determina la clase donde se ubica cada cuartil, con la ayuda de siguiente regla,

$$\frac{kn}{4}, \ \ k = 1,2,3$$

Donde $K$ es el número de cuartil y $n$ el tamaño de la muestra, o de la población, según el caso,

El segundo paso es aplicar, para cada cuartil, la fórmula

$$Q_k = L_i + \frac{\frac{kn}{4} - F_{i-1}}{f_i} a_i$$

Donde $i$ es el número de cuartil; $L_i$ es el límite inferior de la clase del cuartil; $F_{i-1}$ frecuencia acumulada hasta la clase anterior a la del cuartil; $f_i$ frecuencia de la clase del cuartil y $a_i$ la amplitud de la clase del cuartil.

En forma general para calcular un ***percentil***, el procedimiento es muy parecido. Como sabemos, los percentiles dan los porcentajes de datos que corresponden al $1\%, 2\%, 3\%, \ldots\ldots, 99\%$. Dividen los datos en 99 partes iguales.



Notas de clase R. Urbán

Para su cálculo también se realiza en dos pasos; primero, se busca la clase donde se ubica el percentil de interés,

$$\frac{kn}{100}, \quad k = 1\%, 2\%, 3\%, \dots \dots, 99\%$$

Después, aplicar la formula

$$P_k = L_i + \frac{\frac{kn}{100} - F_{i-1}}{f_i} a_i$$

Así, $i$ es el número de cuartil, $L_i$ es el límite inferior de la clase del percentil; $F_{i-1}$ frecuencia acumulada hasta la clase anterior a la del percentil; $f_i$ frecuencia de la clase del percentil y $a_i$ la amplitud de la clase del percentil.

V***arianza y desviación estándar***

***S***e obtienen de acuerdo con la siguiente regla,

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i * (m_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i {m_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} f_i m_i)^2}{n}}{n-1}$$

Y la desviación estándar $s = \sqrt{s^2}$

Donde $f_i$ es la frecuencia absoluta de la clase, $m_i$ la marca de clase o punto medio y $n$ es el número de observaciones,

***Ejemplo***, regresamos a los datos de ingresos de una comunidad, para calcular estos valores estadísticos, para datos agrupados.

| Clase | Fronteras de clase | Frecuencia de clase $f_i$ | Frecuencia Acumulada | Frecuencia relativa | $m_i$ | $f_i m_i$ | $m_i^2$ | $f_i m_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.1 – 5.9 | 49 | 49 | 0.700 | 4.0 | 196 | 16 | 784 |
| 2 | 5.9 – 9.7 | 11 | 60 | 0.157 | 7.8 | 85.8 | 60.8 | 669.2 |
| 3 | 9.7 – 13.5 | 6 | 66 | 0.086 | 11.6 | 69.6 | 134.6 | 807.4 |
| 4 | 13.5 – 17.3 | 1 | 67 | 0.014 | 15.4 | 15.4 | 237.2 | 237.2 |
| 5 | 17.3 – 21.1 | 1 | 68 | 0.014 | 19.2 | 19.2 | 368.6 | 368.6 |
| 6 | 21.1 – 24.9 | 0 | 68 | 0.000 | 23.0 | 0 | 529.0 | 0 |
| 7 | 24.9 – 28.7 | 2 | 70 | 0.029 | 26.8 | 53.6 | 718.2 | 1,436.5 |
| | Totales | 70 | | 1 | | 439.6 | | 4,302.9 |

Notas de clase R. Urbán

Las medidas de tendencia central son;

| | | |
|---|---|---|
| *Promedio* | $\bar{x} = \frac{439.6}{70} = 6.28$ | |
| *Mediana* | $M_e = 2.1 + \frac{70/_{2} - 0}{49} 3.8 = 4.81$ | *Se ubica en la clase 1* |
| *Moda* | $M_o = 2.1 + \frac{49 - 0}{(49 - 0) + (49 - 11)} 3.8 = 4.24$ | |

Las medidas de dispersión, las obtenemos así;

| | | |
|---|---|---|
| *Primer cuartil* | $\frac{1*70}{4} = 17.5,$ clase 1 | $Q_1 = 2.1 + \frac{17.5 - 0}{49}(3.8) \cong 3.45$ |
| *Segundo cuartil* | $\frac{2*70}{4} = 35$ clase 1 | $Q_2 = 2.1 + \frac{35 - 0}{49}(3.8) \cong 4.81$ |
| *Tercer cuartil* | $\frac{3*70}{4} = 52.5$ clase 2 | $Q_3 = 5.9 + \frac{52.5 - 49}{11}(3.8) \cong 7.11$ |
| *Varianza* | $s^2 = \frac{4302.9 - {439.6^2}/{70}}{69} = 22.35$ | |
| Desviación estándar | $s \approx \sqrt{22.35} = 4.727$ | |

### *9.10.4 Medidas de concentración.*

Hasta ahora hemos analizado la dispersión de una distribución, pero necesitamos conocer su comportamiento. Las **medidas de concentración** permiten describir la forma que tiene la curva que representa la serie de datos de la muestra. En concreto, podemos estudiar las siguientes características de la curva:

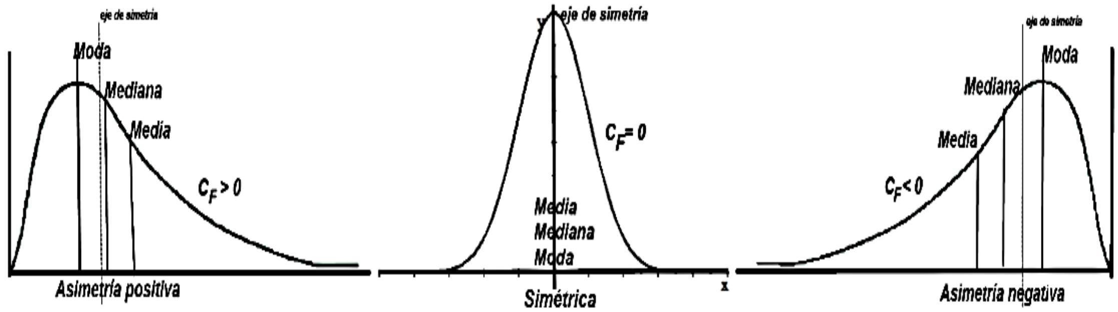
- **Asimetría**: mide si la curva tiene una forma simétrica, es decir, si respecto al centro de la misma (centro de simetría) los segmentos de curva que quedan a derecha e izquierda son similares.
- **Curtosis:** mide si los valores de la distribución están más o menos concentrados alrededor de los valores medios de la muestra.
- **Concentración**: mide si los valores de la variable están más o menos uniformemente repartidos a lo largo de la muestra.

#### *8.11.4.1 Coeficiente de asimetría de Fisher*

Si trazamos una vertical en el valor de la media, en el diagrama de barras o histograma, de una variable, esta línea vertical es el eje de simetría.

Notas de clase R. Urbán

Una distribución es simétrica si este eje parte en exactamente dos partes iguales a la distribución. En caso contrario, dicha distribución será asimétrica.




Para medir el nivel de asimetría se utiliza el llamado **Coeficiente de Asimetría de Fisher**, que viene definido:

Para datos no agrupados: $c_F = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^3}{n * s^3}$ Para datos agrupados $c_F = \frac{\sum(m_i - \overline{x})^3 f_i}{n * s^3}$

De acuerdo con la forma de la gráfica puede ser explicada así,

- $\boldsymbol{c_F}$ **= 0** (distribución simétrica; existe la misma concentración de valores a la derecha y a la izquierda de la media) ***media=moda=mediana***
- $\boldsymbol{c_F}$ **> 0** (distribución asimétrica positiva; por lo que los valores se tienden a reunir más en la parte izquierda que en la derecha de la media.) ***media > mediana > moda***
- $\boldsymbol{c_F}$ **< 0** (distribución asimétrica negativa; los valores se tienden a reunir más en la parte derecha de la media) ***media < mediana < moda***

Para el ejercicio anterior

| Clase | Fronteras de clase | | Frecuencia de clase | *Punto medio* | Asimetría |
|---|---|---|---|---|---|
| | Inferior | Superior | $f_i$ | $m_i$ | $\sum_{i=1}^{n}(m_i - \overline{x})^3 * f_i$ |
| 1 | 2.1 | 5.9 | 49 | 4.0 | -580.8 |
| 2 | 5.9 | 9.7 | 11 | 7.8 | 38.6 |
| 3 | 9.7 | 13.5 | 6 | 11.6 | 903.4 |
| 4 | 13.5 | 17.3 | 1 | 15.4 | 758.6 |
| 5 | 17.3 | 21.1 | 1 | 19.2 | 2,156.7 |
| 6 | 21.1 | 24.9 | 0 | 23.0 | 0.0 |
| 7 | 24.9 | 28.7 | 2 | 26.8 | 17,280.7 |

Notas de clase R. Urba

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Sumas | | | 70 | Sumas | 20,557.25 |

La media de la muestra es $\overline{x} = 6.28$ y la desviación estándar $s = 4.727$, luego,

$$c_F = \frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i - \overline{x})^3 * f_i}{n * s^3} = \frac{20{,}557.25}{70 * 4.727^3} = 2.78$$

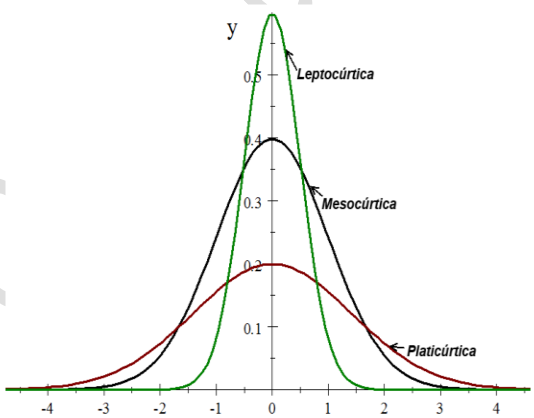
Este valor nos indica que la muestra tiene una distribución asimétrica positiva.

### *9.10.4.2 Curtosis*

El ***Coeficiente de Curtosis*** analiza el grado de concentración que presentan los valores alrededor de la zona central de la distribución.

Se definen 3 tipos de distribuciones según su grado de Curtosis:

- ***Distribución Mesocúrtica***: presenta un grado de concentración medio alrededor de los valores centrales de la variable (el mismo que presenta una distribución normal).
- ***Distribución leptocúrtica***: presenta un elevado grado de concentración alrededor de los valores centrales de la variable.
- ***Distribución platicúrtica***: presenta un reducido grado de concentración alrededor de los valores centrales de la variable.




El **Coeficiente de Curtosis** se obtiene con la siguiente fórmula:

Para datos no agrupados: $c_k = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^4}{n\, s^4} - 3$ y para datos agrupados $c_k = \frac{\sum(m_i - \overline{x})^4 * f_i}{n\, s^4} - 3$.

Los valores que puede tomar el coeficiente clasifican la distribución en,

**$c_k$ = 0 (distribución Mesocúrtica).**
**$c_k$ > 0 (distribución leptocúrtica).**
**$c_k$ < 0 (distribución platicúrtica).**

Continuando con el ejercicio anterior,

| Clase | Fronteras de clase | | Frecuencia de clase | *Punto medio* | Asimetría |
|---|---|---|---|---|---|
| | Inferior | Superior | $f_i$ | | $\sum_{i=1}^{n}(m_i - \overline{x})^4 * f_i$ |
| 1 | 2.1 | 5.9 | 49 | 4.0 | 1,324.1 |
| 2 | 5.9 | 9.7 | 11 | 7.8 | 58.7 |
| 3 | 9.7 | 13.5 | 6 | 11.6 | 4,806.2 |
| 4 | 13.5 | 17.3 | 1 | 15.4 | 6,918.0 |
| 5 | 17.3 | 21.1 | 1 | 19.2 | 27,864.4 |
| 6 | 21.1 | 24.9 | 0 | 23.0 | 0.0 |
| 7 | 24.9 | 28.7 | 2 | 26.8 | 354,600.6 |
| Sumas | | | 70 | Sumas | 395,572.0 |

Para una media $\overline{x} = 6.28$ y desviación estándar $s = 4.727$,

De esta manera,

$$c_k = \frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i - \overline{x})^4 * f_i}{n * s^4} = \frac{395,572.0}{70 * (4.727)^4} - 3 = 8.31$$

El ***Coeficiente de Curtosis*** de esta muestra es 8.31, que corresponde a una distribución leptocúrtica, con un alto grado de concentración alrededor de los valores centrales.

### *9.18.4.3 Coeficiente de Gini[16] y Curva de Lorenz*

La desigualdad económica, inequidad de bienes e ingresos, impactan nuestra forma de vida y es inevitable comparar entre individuos o entre países para tratar de medir el grado de inequidad que existe entre los diferentes grupos de habitantes de un país y en su caso comparar con otros países. Si comparamos el PIB[17] per cápita en el 2020 entre México (9,946 dólares) y Brasil (8,717.2), con una tasa de 1.14, no podríamos afirmar si los pobres son más pobres en Brasil que en México. Este indicador no sería adecuado para caracterizar la distribución del ingreso de una población.

es de clase R. Urban

---

[16] El coeficiente se le atribuye al matemático Italiano *Corrado Gini (1884-1965)*. En realidad, las bases del estudio las realizó el matemático alemán Jordan William en 1869, quien además de desarrollo la técnica para la solución de ecuaciones lineales conocida como *Eliminación de Gauss-Jordan.* Gini posteriormente revisa el indicador y lo presenta en su obra *Variabilità e mutabilità* como lo conocemos hoy en día.

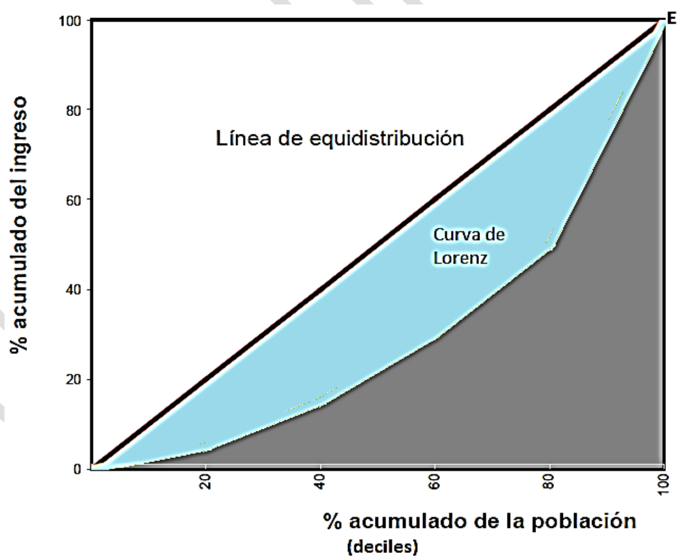
[17] PIB per cápita (US$ a precios actuales) - Mexico  y Brasil (bancomundial.org)2020, México 9,946, Brasil 8717.2 US$.

El ***coeficiente de Gini***, o índice de Gini, es una medida estadística que sirve para hacer inferencias acerca de la distribución de una variable (salario, ingresos, riqueza) de una población.

El coeficiente se calcula a partir de la ***curva de Lorenz,*** que es una gráfica de una distribución acumulada. En ella se relacionan los porcentajes acumulados de población con porcentajes acumulados de ingreso que esta población recibe. En el eje de abscisas se representa la población "ordenada" de forma que los percentiles de ingresos más bajos quedan a la izquierda y los más altos a la derecha.

La línea que parte del origen hasta el punto extremo, lado derecho, y parte en dos áreas se llama ***línea de equidistribución.*** Muestra la situación teórica de distribución equitativa del ingreso.

*Grafica xx*




El ***Coeficiente de Gini*** se calcula como el cociente entre el área comprendida entre la Línea de equidistribución y la Curva de Lorenz. A medida que mejora la equidad el área disminuye y la Curva de Lorenz se acerca a la diagonal.

Si la Curva de Lorenz se aleja de la diagonal, aumenta la desigualdad a la misma velocidad que aumenta el área. Si la desigualdad es total, el área gris, debajo de la curva de Lorenz desaparece, lo que indica que una sola familia se queda con el total de los ingresos.

Este índice se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$G = \left| 1 - \sum_{k=1}^{k=n-1} (X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k) \right|$$

Un primer enfoque consiste en definir el coeficiente de Gini como el doble del área entre la curva de Lorenz de la distribución del ingreso y la línea de equidistribución (figura xxx), puede tomar valores entre 0 y 1. La distribución será más equitativa si el coeficiente se acerca a cero. Valores cercanos a 1 indicarán una distribución inequitativa, el ingreso se concentra en el decil de los que obtienen el mayor ingreso, una distribución desigual.

***Ejemplo**: Calcular el Índice Gini para la encuesta de ingreso gasto de los hogares siguiente.*

INGRESOS DE LOS HOGARES TRIMESTRAL POR DECILES
(Miles de pesos)

| Deciles de hogares | Total | |
|---|---|---|
| | Hogares | Ingreso |
| I | 2 907 433 | 17 918 764 |
| II | 2 907 433 | 31 533 846 |
| III | 2 907 433 | 42 175 769 |
| IV | 2 907 433 | 53 087 119 |
| V | 2 907 433 | 64 773 539 |
| VI | 2 907 433 | 78 528 188 |
| VII | 2 907 433 | 96 230 532 |
| VIII | 2 907 433 | 121 878 488 |
| IX | 2 907 433 | 165 280 112 |
| X | 2 907 433 | 344 322 586 |
| Totales | **29 074 330** | **1 015 728 943** |

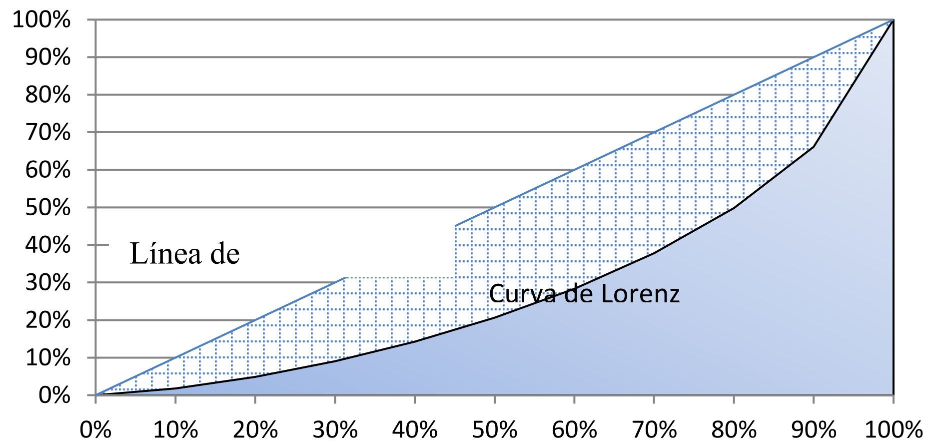
Fuente: INEGI, Encuesta Nacional de ingreso y gasto de los hogares 2010.

Entonces,

| Deciles | Porcentaje de ingreso | Acumulados | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $y_i$ | $X$ | $Y$ | $X_{k+1} - X_k$ | $Y_{k+1} + Y_k$ | |
| 0.10 | 0.018 | 0.100 | 0.018 | 0.100 | 0.018 | 0.0018 |
| 0.10 | 0.031 | 0.200 | 0.049 | 0.100 | 0.066 | 0.0066 |
| 0.10 | 0.042 | 0.300 | 0.090 | 0.100 | 0.139 | 0.0139 |
| 0.10 | 0.052 | 0.400 | 0.142 | 0.100 | 0.233 | 0.0233 |
| 0.10 | 0.064 | 0.500 | 0.206 | 0.100 | 0.349 | 0.0349 |
| 0.10 | 0.077 | 0.600 | 0.284 | 0.100 | 0.490 | 0.0490 |
| 0.10 | 0.095 | 0.700 | 0.378 | 0.100 | 0.662 | 0.0662 |
| 0.10 | 0.120 | 0.800 | 0.498 | 0.100 | 0.877 | 0.0877 |
| 0.10 | 0.163 | 0.900 | 0.661 | 0.100 | 1.159 | 0.1159 |
| 0.10 | 0.339 | 1.000 | 1.000 | 0.100 | 1.661 | 0.1661 |
| | | | *Coeficiente de Gini* | | | 0.4346 |

Notas de clase R. Urbán

**Un Índice de Gini de 0.4346** indica una distribución medianamente equitativa.
El gráfico de la distribución sería:




*Un segundo ejemplo, para los datos de ingreso de una comunidad*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2095 | 3143 | 3829 | 4111 | 4427 | 5103 | 5578 | 6099 | 7558 | 11568 |
| | 2153 | 3174 | 3870 | 4128 | 4541 | 5255 | 5598 | 6141 | 7892 | 13148 |
| | 2522 | 3426 | 3900 | 4146 | 4606 | 5421 | 5696 | 6253 | 8981 | 13519 |
| | 2573 | 3430 | 3921 | 4195 | 4718 | 5439 | 5709 | 6333 | 9332 | 16583 |
| | 2585 | 3597 | 4025 | 4232 | 4940 | 5473 | 5723 | 6669 | 10508 | 19349 |
| | 2809 | 3614 | 4025 | 4253 | 4974 | 5495 | 5778 | 6838 | 10695 | 27275 |
| | 2861 | 3771 | 4108 | 4316 | 5029 | 5512 | 5848 | 6968 | 11155 | 28665 |
| Totales | 17,598 | 24,155 | 27,678 | 29,381 | 33,235 | 37,698 | 39,930 | 45,301 | 66,121 | 130,107 |

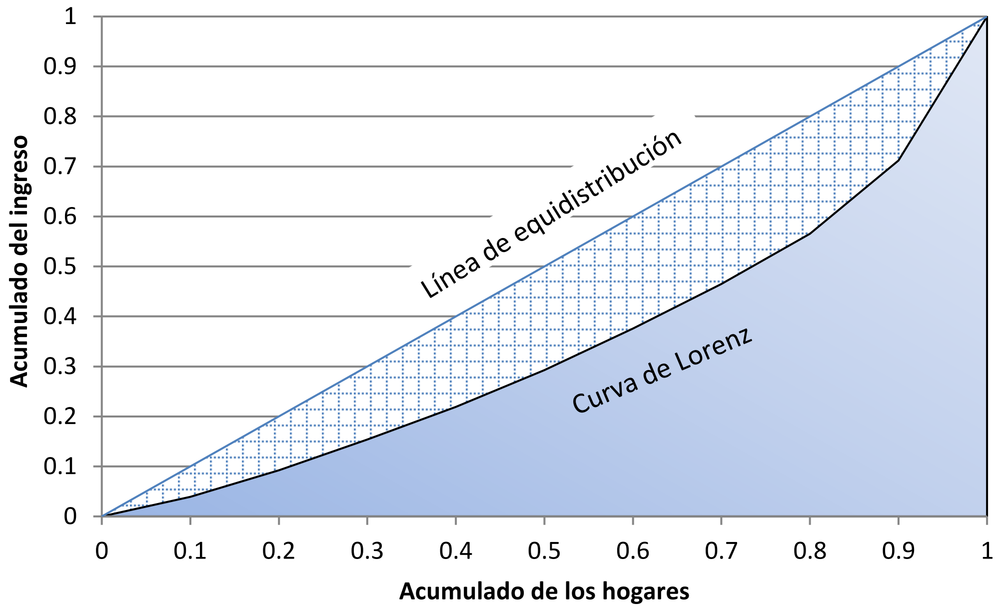
La tabla de cálculo para encontrar el coeficiente de Gini.

| Deciles | Hogares | Ingreso | Hogares $x_i$ | % de ingreso $y_i$ | Acumulado $x$ | Acumulado $y$ | A $x_{k+1} - x_k$ | B $y_{k+1} + y_k$ | A*B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 7 | 17,598 | 0.10 | 0.039 | 0.100 | 0.039 | 0.100 | 0.039 | 0.004 |
| II | 7 | 24,155 | 0.10 | 0.054 | 0.200 | 0.093 | 0.100 | 0.132 | 0.013 |
| III | 7 | 27,678 | 0.10 | 0.061 | 0.300 | 0.154 | 0.100 | 0.246 | 0.025 |
| IV | 7 | 29,381 | 0.10 | 0.065 | 0.400 | 0.219 | 0.100 | 0.373 | 0.037 |
| V | 7 | 33,235 | 0.10 | 0.074 | 0.500 | 0.293 | 0.100 | 0.512 | 0.051 |
| VI | 7 | 37,698 | 0.10 | 0.084 | 0.600 | 0.376 | 0.100 | 0.669 | 0.067 |
| VII | 7 | 39,930 | 0.10 | 0.088 | 0.700 | 0.465 | 0.100 | 0.841 | 0.084 |
| VIII | 7 | 45,301 | 0.10 | 0.100 | 0.800 | 0.565 | 0.100 | 1.030 | 0.103 |
| IX | 7 | 66,121 | 0.10 | 0.147 | 0.900 | 0.712 | 0.100 | 1.277 | 0.128 |
| X | 7 | 130,107 | 0.10 | 0.288 | 1.000 | 1.000 | 0.100 | 1.712 | 0.171 |

Notas de clase R.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Totales | 70 | 451,204 | | 1 | | COEFICIENTE DE GINI[2] | | 0.317 |

Grafica xxxxx




Para este ejercicio el coeficiente de Gini =0.317, indica una distribución con cierta tendencia a desigual, si se estudiaran otros años, quizá podríamos conocer si se está separando de la línea de distribución en cuyo caso existiría una tendencia a la desigualdad.

Notas de clase

***Ejercicios.***

1. *Con el fin de sustituir el suministro eléctrico tradicional con una alternativa de energía solar, se realiza en una unidad habitacional de 60 casas una encuesta de los costos de energía promedio mensual para el último año. Los resultados fueron los siguientes.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *253* | *500* | *625* | *1338* | *1318* | *321* |
| *354* | *952* | *472* | *1210* | *369* | *640* |
| *400* | *681* | *1033* | *1089* | *1217* | *1120* |
| *1128* | *1256* | *678* | *958* | *1510* | *562* |
| *690* | *840* | *1367* | *1366* | *1108* | *678* |
| *750* | *1598* | *799* | *750* | *941* | *1210* |
| *1026* | *1480* | *256* | *1188* | *433* | *889* |
| *658* | *472* | *750* | *1024* | *637* | *393* |
| *473* | *348* | *1185* | *1322* | *1387* | *1338* |
| *979* | *1064* | *1439* | *1068* | *651* | *1381* |

*Encontrar lo siguiente:*

*a) Construir histograma de frecuencias y el polígono de frecuencias, utilice la fórmula de Sturges para calcular el número de intervalos de clase.*

*b) El consumo promedio de las viviendas.*

2. *Una empresa indígena pizca camarón en los meses de septiembre a diciembre. La captura en kilos durante los últimos 95 días fue:*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 153 | 170 | 175 | 183 | 195 | 207 | 225 | 235 | 244 | 256 |
| 160 | 170 | 176 | 183 | 198 | 208 | 226 | 235 | 245 | 257 |
| 161 | 171 | 176 | 185 | 198 | 210 | 227 | 237 | 247 | 257 |
| 161 | 171 | 177 | 186 | 199 | 210 | 228 | 237 | 248 | 257 |
| 163 | 171 | 178 | 188 | 200 | 211 | 231 | 237 | 248 | 259 |
| 163 | 173 | 179 | 190 | 201 | 213 | 233 | 239 | 248 | |
| 164 | 173 | 179 | 190 | 201 | 219 | 234 | 239 | 249 | |
| 165 | 174 | 181 | 192 | 201 | 220 | 234 | 241 | 252 | |
| 165 | 174 | 182 | 192 | 201 | 221 | 235 | 241 | 256 | |
| 167 | 175 | 182 | 195 | 206 | 225 | 235 | 243 | 256 | |

*Encontrar:*

*a) Construir histograma de frecuencias, utilice 8 intervalos de clase.*

*b) Encontrar las medidas de tendencia central: para datos agrupados. Media, mediana, moda,*

*c) Encontrar las medidas de variabilidad, I, II y III cuartil, mediana y moda, varianza, para datos agrupados.*

3. *En la tabla siguiente se muestran los datos de saldos de cuentas de crédito de un banco, en cientos de pesos*

| Saldo | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 144 | 178 | 215 | 250 | 310 | 325 | 430 |
| 75 | 146 | 180 | 216 | 250 | 310 | 345 | 450 |
| 80 | 152 | 185 | 220 | 255 | 312 | 345 | 520 |
| 85 | 155 | 185 | 233 | 260 | 312 | 360 | 540 |
| 95 | 160 | 190 | 235 | 265 | 313 | 365 | 560 |
| 120 | 160 | 190 | 235 | 275 | 315 | 389 | 560 |
| 125 | 162 | 204 | 235 | 280 | 320 | 403 | 560 |
| 130 | 165 | 205 | 235 | 290 | 320 | 405 | 600 |
| 135 | 165 | 209 | 240 | 302 | 320 | 416 | 602 |
| 136 | 173 | 210 | 240 | 305 | 322 | 425 | 605 |

Notas de clase R. Urbán

*Encontrar lo siguiente:*

*a) Construir histograma de frecuencias, utilice la fórmula de Sturges para calcular el número de intervalos de clase*

*b) Medidas de tendencia central: para datos no agrupados; media, mediana, moda,*

*c) Las medidas de variabilidad, I, II y III cuartil, mediana y moda, varianza y desviación estándar para datos no agrupados*

*4. En un Estado de la República Mexicana se realizó una encuesta de ingreso, los resultados son los siguientes:*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1200 | 1789 | 1678 | 1100 | 1345 | 2340 | 1600 | 2456 |
| 1254 | 1876 | 1789 | 1200 | 1657 | 2100 | 1456 | 2567 |
| 1500 | 1678 | 1456 | 1300 | 899 | 2311 | 1345 | 2567 |
| 1600 | 1987 | 1765 | 1400 | 1000 | 1450 | 1456 | 2980 |
| 2245 | 1789 | 1876 | 1500 | 898 | 1456 | 1567 | 1450 |
| 2200 | 2390 | 1876 | 1345 | 879 | 1654 | 1980 | 1765 |
| 1876 | 2200 | 1456 | 1456 | 1234 | 1768 | 1890 | 1456 |
| 1678 | 2100 | 1897 | 2456 | 1234 | 1345 | 2789 | 1879 |
| 3658 | 2456 | 2100 | 1980 | 1456 | 1231 | 1234 | 1345 |
| 2789 | 1678 | 2200 | 1789 | 1893 | 1100 | 1456 | 1546 |

*a) Calcular el coeficiente de Gini.*

*b) Dibujar la curva de Lorenz*

*c) Explique los resultados.*

*5. En una localidad de pescadores, se realizó una encuesta de ingreso familiar a 110 trabajadores, los resultados que se obtuvieron son los siguientes.*

| Decil | Personas | Ingreso Total |
|---|---|---|
| I | 11 | 4,216.67 |
| II | 11 | 4,216.67 |
| III | 11 | 6,516.67 |
| IV | 11 | 8,855.88 |
| V | 11 | 17,082.35 |
| VI | 11 | 23,073.01 |
| VII | 11 | 35,785.89 |
| VIII | 11 | 77,589.29 |
| IX | 11 | 152,653.57 |
| X | 11 | 540,146.00 |
| Total | 110 | 870,136.00 |

*a) Calcular el coeficiente de Gini.*

*b) Dibujar la curva de Lorenz*

*c) Explique los resultados.*



Notas de clase R. Urbán

6. *En una comunidad indígena se realizó una encuesta de ingreso que se resume en el siguiente cuadro:*

| *Decil* | *Población* | *Ingreso* |
|---|---|---|
| *I* | *9* | *7,175.00* |
| *II* | *9* | *14,201.92* |
| *III* | *9* | *18,173.08* |
| *IV* | *9* | *18,173.08* |
| *V* | *9* | *33,076.92* |
| *VI* | *9* | *45,000.00* |
| *VII* | *9* | *85,000.00* |
| *VIII* | *9* | *140,000.00* |
| *IX* | *9* | *220,000.00* |
| *X* | *9* | *410,000.00* |
| *TOTAL* | *90* | *990,800* |

*a) Calcular el coeficiente de Gini.*
*b) Dibujar la curva de Lorenz*
*c) Explique los resultados.*

## *9.11 Otras formas gráficas.*

Existen algunos otros diagramas auxiliares que sirven como un resumen visual de las observaciones. La utilización de estos dependerá de ciertos factores como, diferentes períodos de tiempo, diferentes áreas geográficas, etc.

### *Barras apiladas.*

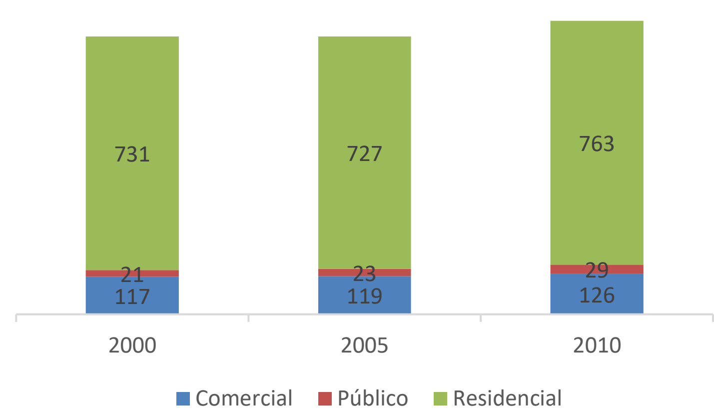
Son de utilidad cuando tenemos información con temporalidad dividida en variables categóricas. El interés por este tipo de gráfico es innegable, pero tienen un gran inconveniente. En algunos casos no es aprecian las proporciones o los efectos reales de las variables y para varias variables, se pierde la visibilidad del gráfico. Un ejemplo, para presentar en forma gráfica el consumo de combustibles por sector en México.

Notas de clase R Urbán

*Tabla 9.6 Consumo de energía en los sectores residencial, comercial y público en México (P-Joules)*

| | 2000 | 2005 | 2010 |
|---|---|---|---|
| | 868 | 869 | 917 |
| Comercial | 117 | 119 | 126 |
| Público | 21 | 23 | 29 |
| Residencial | 731 | 727 | 763 |

Fuente: Sistema de Información Energética, Sener. Las cifras fueron redondeadas.




**Gráfica 9.7 Consumo de energía en los sectores Comercial, Público y Residencial**

Una opción similar para este tipo de gráficos son las ***barras apiladas 100%***

Las barras apiladas 100% son útiles para resaltar la relación de las partes con respecto al total, cuando el total acumulado no es importante. Por ejemplo,

En algunos casos, al levantar una encuesta tenemos algunas variables como:

¿Calidad de los servicios financieros? Y las respuestas pueden ser

Bueno ( ) Regular ( ) Malo ( )

Tamaño de la explotación agrícola.

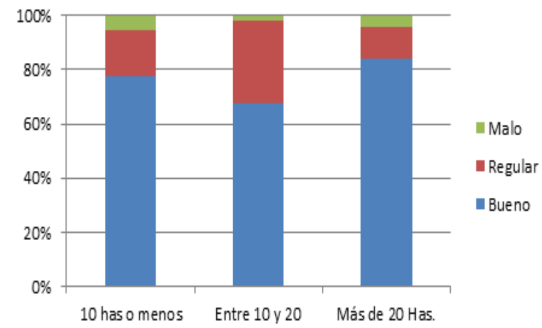
10 has o menos ( ) entre 10 y 20 ( ) más de 20 has ( )

Si los resultados de la encuesta a 158 productores son los siguientes:

*Tabla 9.7 Calidad servicios financieros financieros*

| | Bueno | Regular | Malo |
|---|---|---|---|
| 10 has o menos | 28 | 6 | 2 |
| Entre 10 y 20 | 36 | 16 | 1 |
| Más de 20 Has. | 58 | 8 | 3 |
| Total | 122 | 30 | 6 |

*Gráfica 9.8 Calidad de servicios*




En este tipo de gráfico todas las barras tienen la misma altura, debido a que representan el 100% de las respuestas y no la frecuencia de cada categoría. Desde luego, cada una de las categorías de la variable tamaño de la explotación cafetalera, cuenta con una frecuencia diferente, pero el objetivo de este tipo de gráficos no es determinar el porcentaje o recuento de las categorías de la variable principal (*tamaño de la parcela*), sino representar el porcentaje de participación con que cuenta cada una de las categorías de la variable secundaria (*Calidad de los servicios financieros*).

Si nos fijamos en los resultados del gráfico, los valores de las marcas de escala representan porcentajes. Las frecuencias de cada barra son diferentes; sin embargo, lo que interesa es identificar los porcentajes de participación de las categorías de la variable secundaria (Calidad de los servicios financieros) en cada una de las categorías de la variable principal (tamaño de la parcela).

***Graficas circulares.***

Este tipo de gráficos son frecuentes en informes de trabajo por su impacto visual. Sin embargo, es un gráfico muy simple que no siempre ilustra la importancia de los datos ya que se muestran los grupos de observaciones como segmentos independientes dentro del gráfico.

El propósito de esta de representación es similar al gráfico de barras, pero con posibilidades menores. No sirve para representar la evolución de las variables. Así,
no se debe utilizar para representar series de tiempo.

La construcción de este tipo de gráficos se facilita, en caso de no utilizar una computadora para hacerlo, si se recuerda que un círculo completo tiene 360 grados y que este ángulo debe corresponder a un 100% del total representado. Para el caso por ejemplo de las exportaciones a USA que son el 77.65%,

$$\left(\frac{77.65\%}{100\%}(360 grados)\right) \cong 280\ grados)$$

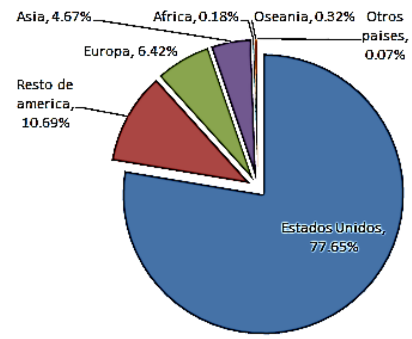
***Por ejemplo***, si queremos mostrar, una cantidad total, como está repartida en diferentes zonas geográficas las exportaciones totales de México para el año 2009.

*Tabla 9.8 Exportaciones mexicanas 2012*

*(millones de dólares)*

| | | Porcentaje |
|---|---|---|
| USA | 287,844 | 77.65 |
| Resto América | 39,640 | 10.69 |
| Europa | 23,790 | 6.42 |
| Asia | 17,310 | 4.67 |
| África | 682 | 0.18 |
| Oceanía | 1,196 | 0.32 |
| Otros países | 243 | 0.07 |
| **Total** | **370,706** | **100%** |

*Gráfica 9.9 Exportaciones mexicanas 2012*




Fuente: Grupo de trabajo de Estadísticas de Comercio Exterior, integrado por el Banco de México, INEGI, Servicio de Administración Tributaria y la Secretaría de Economía. Enero 2014.

***Gráficas de radar (o de araña).***

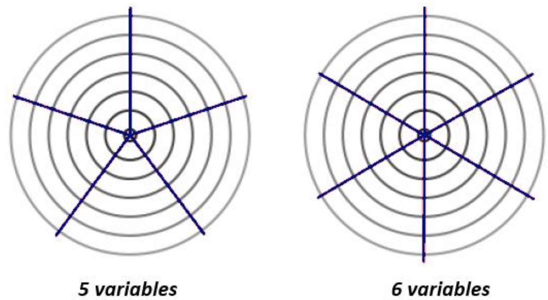
Es un tipo de gráfico bidimensional que es de gran utilidad para mostrar patrones de comportamiento de grupo de datos con respecto a diversas variables (por lo menos 4, pero no más de 12/14 por razones de legibilidad) que son muy dispares entre si. Permite mostrar en forma visual presentar las distancias entre los valores reales y los ideales de un proyecto.

El objetivo es la elaboración de una figura con un número de ejes igual al número de variables, en un círculo virtual con un origen común y una separación igual a 360°/número de variables (de ahí el nombre de radar).

En un gráfico bidimensional, los datos se trazan en pares en el cuadrante que corresponda. En los gráficos de araña, el radio del gráfico representa el eje de las $x`s$, y la circunferencia el eje de las $y`s$. Esto es favorable para mostrar el equilibrio o desequilibrio en los datos.

Cada eje tiene una unidad de medida y una escala que corresponde a la variable que representa. Lo deseable sería que todas las variables tuvieran la misma escala, por ejemplo, si se expresan como un porcentaje. Esta forma gráfica es útil para mostrar series de tiempo. Su forma sigue el movimiento de las agujas de un reloj.

*Gráfica 9.10*

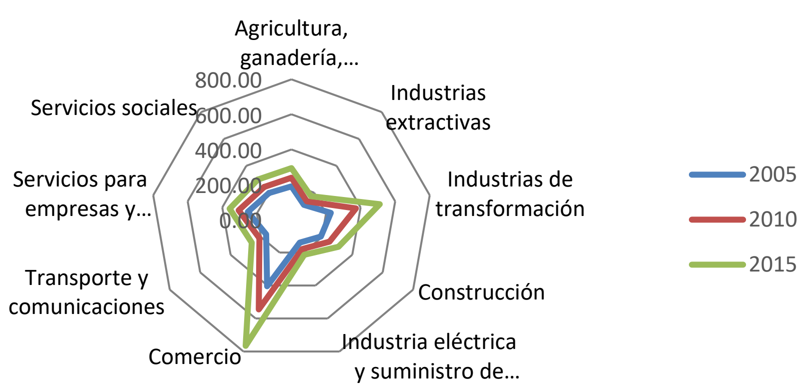



***Ejemplo.*** Interesa comparar el salario en diferentes sectores económicos. A partir de los datos de cotización al IMSS se puede resumir en el siguiente cuadro.

| *Tabla 9.9 Salario de Cotización al IMSS por Sector de Actividad Económica (Pesos por día)* | 2005 | 2010 | 2015 |
|---|---|---|---|
| Agricultura, ganadería, silvicultura, caza y pesca | 189.96 | 239.16 | 294.02 |
| Industrias extractivas | 110.28 | 136.42 | 174.09 |
| Industrias de transformación | 227.69 | 373.11 | 510.93 |
| Construcción | 194.06 | 251.34 | 309.66 |
| Industria eléctrica y suministro de agua potable | 140.20 | 178.88 | 213.22 |
| Comercio | 404.29 | 544.68 | 765.78 |
| Transporte y comunicaciones | 166.99 | 211.57 | 262.04 |
| Servicios para empresas y personas | 252.67 | 305.52 | 357.94 |
| Servicios sociales | 198.75 | 242.87 | 298.37 |
| Fuente IMSS | | | |

La gráfica radial tendrá 9 ejes, uno por cada sector económico. El ángulo entre cada eje será de $\frac{360}{9} = 40°$. Así, la representación de los datos sería la siguiente, para este caso todos los ejes tendrían la misma graduación.

Gráfica 9.11 Salario de cotizacion al IMSS por sector



En el gráfico se puede destacar que, en estos tres años de estudio, los sectores de Industrias extractivas, transporte y comunicaciones e industria eléctrica históricamente han tenido los salarios por día más bajos. El óptimo sería cuando todos los sectores alcanzaran el máximo salario diario.

Este tipo de gráficos es muy útil para evaluar un programade trabajo. Por ejemplo, para medir un programa de capacitación, podemos considerar variables como; aprendizaje, claridad de la exposición, cumplimiento de temáticas, cumplimiento de objetivos. En este caso tendríamos 4 ejes, uno por cada variable. Si hacemos comparaciones cada cierto tiempo de los avances en la capacitación, sería muy útil para presentar la evolución de los objetivos ya que el gráfico traza las medias obtenidas y nos permite visualizar el progreso de cada uno de ellos.

Notas de clase R. Urbán

Xxxxxx. Tabla. Formulario del capitulo

| Indicador | Datos no agrupados | Datos agrupados |
|---|---|---|
| **Medidas de tendencia central** | | |
| Media | $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ | $\overline{x} \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i m_i}{n}$ |
| Media geométrica | $\overline{x}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * \ldots x_n}$ | $\overline{x}_G \cong \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f_i m_i} = \sqrt[n]{f_1 m_1 * f_2 m_2 * \ldots f_n m_n}$ |
| Mediana | El valor de la variable que esta al centro de los datos.<br>$Me = x_{(n+1)/2}$ | $M_e \cong L_m + \frac{(\frac{n}{2} - F_{i-1})}{f_m} a_m$<br>$Lm$ límite inferior de la clase donde está la mediana<br>$F_{i-1}$ Frecuencia acumulada hasta la clase anterior a la mediana<br>$f_m$ frecuencia absoluta de la clase mediana<br>$a_m$ amplitud de la clase mediana |
| Moda | Valor que más se repite<br>$Mo$ | $Mo = L_{m_o} + \frac{f_{m_o} - f_{m_o-1}}{(f_{m_o} - f_{m_o-1}) + (f_{m_o} - f_{m_o+1})} a_{m_o}$<br>$L_{m_o}$ limite inferior de la clase modal<br>$f_{m_o}$ frecuencia de la clase modal<br>$f_{m_o-1}$ frecuencia de la clase anterior a modal<br>$f_{m_o+1}$ frecuencia de la clase posterior<br>$a_{m_o}$ amplitud de la clase modal |
| **Medidas de dispersión** | | |
| Varianza | De la población $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$<br>De la muestra<br>$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}{n}}{n-1}$ | Para la población y la muestra<br>$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i m_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} f_i m_i)^2}{n}}{n-1}$ |
| Desviación estándar | De la población $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$<br>De la muestra $s = \sqrt{s^2}$ | Igual que para datos no agrupados |
| **Medidas de concentración** | | |
| Asimetría | $c_F = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^3}{s^3}$ | $c_F = \frac{\frac{1}{n}\sum(m_i - \overline{x})^3 f_i}{s^3}$<br>$C_F = 0$ Simetría<br>$C_F > 0$ Asimetría (+) $C_F < 0$ Asimetría (-) |
| Curtosis | $c_k = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^4}{s^4} - 3$ | $c_k = \frac{\frac{1}{n}\sum(m_i - \overline{x})^4 f_i}{s^4} - 3$<br>$C_K = 0$ Mesocúrtica<br>$C_K > 0$ Leptocúrtica y $C_K < 0$ Platicúrtica |
| **Coeficiente de Gini** | $G = \left\|1 - \sum_{k=1}^{k=n-1}(X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k)\right\|$ | $0 \leq G \leq 1$ Valores cercanos a 0 indican una mejor distribución. |

Notas de clase R. Urban

*"La teoría de las probabilidades es, como mucho, simple sentido común reducido al cálculo."*
*Laplace (1749-1827)*

## *9.12 Probabilidad*

Como ya se mencionó, el objetivo de la estadística es hacer inferencias de una población a partir de los datos de una muestra. Entonces, se necesita un procedimiento adecuado que permita conseguir los datos necesarios para alcanzar nuestro objetivo.

Frecuentemente, en nuestra vida profesional, tenemos que tomar decisiones sobre situaciones en las que hay diferentes resultados posibles, sin poder determinar con exactitud cuál de ellos ocurrirá. Por ejemplo, el precio de una acción un momento determinado, puede subir, bajar o permanecer sin cambio. Si repetimos la misma acción con el mismo escenario y obtenemos respuestas distintas, estamos frente a un modelo probabilístico. En algunos casos, es posible repetir la acción y anotar sus resultados y encontrar cierta regularidad.

Por ejemplo, invertir en acciones en bolsa es una empresa arriesgada cuyo éxito está sujeto a la incertidumbre, no podríamos asegurar el comportamiento del precio de una acción; mucho menos de todas las acciones en bolsa. Es mejor trabajar con una parte de las acciones y a partir de estas estimar el comportamiento de todas en su conjunto[18], claro con cierto margen de error.

### *9.12.1 Experimento*

Entendemos un experimento como un procedimiento sobre un objeto o ambiente en el cual se tiene un control relativo sobre las condiciones en que se realizan para observar y/o medir los fenómenos resultantes. Algunos ejemplos de experimentos pueden ser los siguientes:

a) Registrar el valor de una acción en bolsa, en un tiempo determinado
b) Entrevistar a un elector para determinar sus preferencias en una elección.
c) Registrar el nivel socioeconómico y el uso, entretenimiento o adquisición de bienes que le da una persona cuando utiliza una tarjeta de crédito

[18] Por ejemplo, el índice Dow Jones Industrial, es un índice bursátil de la bolsa de valores de Nueva York, que mide el rendimiento de 30 empresas importantes que cotizan en bolsa.



Notas de clase. R. Urbán

En general no podemos predecir cuál es el resultado de un experimento; sin embargo, si podemos enumerar el conjunto de todos los resultados posibles. A medida que el experimento se repite una gran cantidad de veces, se describe un patrón o regularidad de los resultados.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar una moneda, no podemos predecir con certeza el resultado, pero si podemos enumerar los resultados posibles; "cara" o "cruz". Si este experimento lo repetimos un número importante veremos qué; aproximadamente la mitad de las veces cae "cara" y la otra mitad cae "cruz".

Algo similar ocurre con el experimento de lanzar de un dado y observamos el número de puntos en la cara superior. En este caso, se tienen seis resultados posibles $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Si repetimos el experimento un número grande de veces veremos que todos los resultados se repiten con la mima regularidad.

***Experimentos aleatorios.***

Si hoy es miércoles, mañana será jueves. Este evento nos da un resultado predecible, no cambia, una semana después se repite con el mismo resultado. Así es la naturaleza de un experimento determinista, cuando en las mismas condiciones se obtienen siempre los mismos resultados. Por ejemplo, lanzar al aire un objeto, este siempre caerá al piso. Si un número natural es non, el siguiente es par.

Un experimento aleatorio, por lo contrario, es aquel que proporciona diferentes resultados aun cuando se repita en las mismas condiciones, su desarrollo no es previsible con certeza. Cada posible estado final de un experimento aleatorio se conoce como resultado del experimento. Un experimento es aleatorio cuando se cumplen las siguientes condiciones.

- El experimento se puede repetir indefinidamente bajo análogas condiciones, pudiéndose obtener resultados distintos para cada realización del experimento.
- Los resultados del experimento no son predecibles.
- En cada ensayo se obtiene un resultado posible. Aunque no se conoce el resultado que ocurrirá, se pueden enumerar todos los resultados posibles.
- Se tiene una regularidad estadística; es decir la frecuencia con que ocurre un evento tiende a un valor fijo. A medida que se repite el experimento, existe una distribución regular de los resultados.

Por ejemplo, el experimento de lanzar una moneda es un experimento aleatorio. Si bien son dos los posibles resultados, no podemos predecir con certeza cual resultado obtendremos cada vez que se realice el experimento. Si repetimos el experimento, digamos unas 100 veces, los resultados se comportan con cierta regularidad; es decir, el

Notas de clase R. Urbán

50% de las veces se obtiene cara y el otro 50% cruz. Entre más se repite el experimento más regular es el resultado.

### *9.12.2 Espacio Muestral.*

Consideremos el experimento de tirar un dado y observar el número de la cara superior. Los resultados posibles son; obtener el 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Si el experimento lo realizamos una sola vez, podemos obtener uno de estos seis resultados básicos. La característica de estos resultados, o eventos, es que no se pueden descomponer. A estos resultados básicos de un experimento les llamamos **eventos simples.**

a) Al lanzar un dado de seis caras, el espacio muestral es
$$E = \{sale\ 1, sale\ 2, sale\ 3, sale\ 4, sale\ 5, sale\ 6\} \text{ ó } E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
b) Al lanzar dos monedas, el espacio muestral es
$$E = \{(c, c), (c, x), (x, c), (x, x)\}$$

*Se llama espacio muestral de un experimento aleatorio, al conjunto de todos los resultados simples de dicho experimento. Los eventos simples se denotan por una letra mayúscula; por ejemplo, la letra E con subíndice si es necesario.*

Si el experimento consiste en observar el sexo al nacimiento de becerros gemelos en un rancho, el espacio muestra es:

| No. De Evento | Resultado |
|---|---|
| $E_1$ | Hembra, Hembra |
| $E_2$ | Hembra, Macho |
| $E_3$ | Macho, Hembra |
| $E_4$ | Macho, Macho |

En muchas ocasiones podemos considerar que un evento es una composición de dos o más eventos simples. Tales eventos se denominan **eventos compuestos**, y pueden ser de dos maneras.

a) La ***unión*** de 2 eventos simples $A, B$. Es el evento que ocurre si $A$ ó $B$ ocurren o ambos, en una sola realización del experimento. Comúnmente lo llamamos la como $A \cup B$.
b) La ***intersección*** de 2 eventos simples $A, B$. Es el evento que ocurre si $A$ y $B$ ocurren simultáneamente, en una sola realización del experimento. Comúnmente lo llamamos la como $A \cap B$.

Notas de clase R. Urban

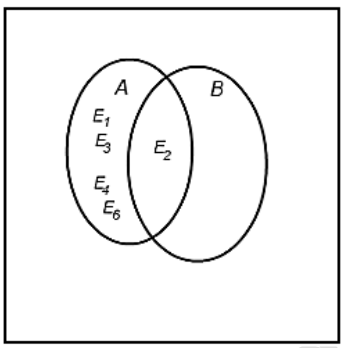
Si el experimento es lanzar un dado, una vez, y observar el número de puntos de la cara superior, algunos ejemplos de eventos compuestos que podríamos formar;

a) Obtener un número par o un número menor o igual que 3, o ambos en una sola tirada. En este caso los eventos simples que pueden cumplir con estas condiciones son,
*Evento A: observar un número par* $A = \{E_2, E_4, E_6\}$
*Evento B: observar un número menor o igual que 3,* $B = \{E_1, E_2, E_3\}$
*El evento "obtener un número par o menor o igual que 3"*

$$A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_6\}$$

b) Obtener un número par y menor o igual que 3.
*Para este ejercicio la intersección contiene solo un evento simple* $A \cap B = \{E_2\}$

c) Algunos otros ejemplos de eventos compuestos pueden ser:
*Obtener un número primo* $\{E_2, E_3, E_5\}$
*Obtener un número primo y par* $\{E_2\}$




Un evento puede representarse en un diagrama de Venn encerrando los puntos muestrales del evento. Por ejemplo, para el experimento anterior, la unión y la intersección. Las operaciones entre conjuntos son muy útiles en la teoría de la probabilidad. Las operaciones entre conjuntos permiten entender y evaluar los eventos de interés o los resultados posibles, su álgebra será necesaria para el resto del capítulo y para la asignación probabilística.

Será necesario tener presente las siguientes propiedades de los conjuntos,

- Ley Distributiva.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Leyes de Morgan.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

### *9.12.3 La Teoría de la Probabilidad:*

La Teoría de la Probabilidad es una rama de la Matemática que permite estudiar todo tipo de fenómenos en que aparecen conceptos como indeterminismo, incertidumbre, impredecible, heterogeneidad, variabilidad, errores de medición, imprecisión y azar.

Notas de clase R. Urbán

Existen tres formas generalmente aceptadas para asignar probabilidad; (1) el modelo subjetivo; (2) el modelo de frecuencia relativa (a posteriori); (3) El modelo clásico (*o a priori*);

La ***probabilidad subjetiva*** se basa en la experiencia o en la creencia de que el evento va a ocurrir, un ejemplo de esta asignación es el pronóstico del resultado de un deporte, la asignación de probabilidad de que un equipo o un competidor obtengan la victoria, se basa en la experiencia en eventos pasados, rachas ganadoras, etc. Esta asignación de probabilidad se obtiene cuando los eventos ocurren solo una vez y en algunos casos los eventos no tienen la misma posibilidad de ocurrir, en un encuentro deportivo, por ejemplo, puede ocurrir que ninguno gane, se obtenga un empate. En este caso tendríamos tres resultados posibles.

El ***modelo de frecuencia relativa*** utiliza datos que se han observado empíricamente. Registra la frecuencia con que ha ocurrido algún evento en el pasado y estima la probabilidad de que el evento ocurra nuevamente con base en resultados anteriores.

La probabilidad de un evento con base en el modelo de frecuencia relativa se determina mediante la siguiente regla:

$$P(E) = \frac{Número\ de\ veces\ que\ ha\ ocurrido\ el\ evento\ en\ el\ pasado}{Número\ total\ de\ observaciones}$$

Por ejemplo, en un año anterior ocurrieron 60 nacimiento en un rancho de bovinos, 35 fueron becerras y 25 becerros. Si queremos encontrar la probabilidad de que el siguiente nacimiento, o cualquiera seleccionado al azahar, sea una becerra por el método de frecuencia relativa tendremos;

$$P(becerra) = \frac{número\ de\ becerras\ que\ nacieron\ el\ año\ anterior}{Número\ total\ de\ nacimientos} = \frac{35}{60} = 0.58$$

A la asignación probabilística basada en la *frecuencia Relativa* también se le llama ***probabilidad empírica o a posteriori*** ya que resultados confiables solo se consiguen después de realizar el experimento un gran número de veces.

En el año 2012 de acuerdo con datos publicados por el INEGI, se registraron en México 2,498,880 nacimientos; de los cuales, 1,262,938 hombres y 1,235,719 mujeres. A partir de esta información, de forma empírica podemos decir que la probabilidad de que nazca una niña es de,

$$P(niña) = \frac{1{,}235{,}719}{2{,}498{,}880} = 0.49$$

Es decir, el 49% de los nacimientos en México son niñas.

Notas de clase R. Urbán

El problema con el modelo de frecuencia relativa se complica cuando se hacen estimaciones con un número insuficiente de observaciones o el experimento no se puede repetir.

El ***modelo clásico*** se relaciona comúnmente con los juegos de azar y las apuestas, se basa en las formas en las que puede ocurrir un evento y el número de resultados posibles. Implica la determinación de la probabilidad de algún evento *a priori*, entes de que ocurra.

En 1654 Blaise Pascal formuló, junto con Pierre de Fermat, la teoría matemática de la probabilidad. Jacques de Bernoulli (1654-1705), el primero de una famosa familia de matemáticos suizos dio una demostración de la ley de los Grandes Números y Abraham de Moivre (1667-1754) enunció el teorema de la regla de multiplicación de la teoría de la probabilidad. Sin embargo, fue Laplace (1749-1827) en su "Teoría Analítica de Probabilidades" (1812) quien definió la probabilidad de un evento como la relación entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Laplace describía la teoría de la probabilidad como "el sentido común reducido al cálculo". introdujo dos conceptos nuevos en la definición de la probabilidad teórica:

- Todos los casos deben tener igual probabilidad de ocurrencia.
- Principio de razón suficiente: mientras nada haga sospechar lo contrario, se debe suponer que todos los casos son igualmente probables.

Si A es un evento y $P(A)$, es la probabilidad de ocurrencia, entonces:

$$P(A) = \frac{\text{número de ocurrencias de } A}{\text{número de resultados posibles}}$$

Por ejemplo, en el experimento del lanzamiento de un dado, si definimos $A$, el evento numero de puntos en la cara superior, ocurren 6 resultados posibles, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

La probabilidad de obtener 4 es

$$P(A = 4) = \frac{1}{6}$$

O también, si nos interesa asignar probabilidad a evento un valor menor o igual a tres,

$$P(A \leq 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Los resultados posibles son 3,2 ó 1.

Notas de clase R. Urbán

### 9.12.4 Espacio muestral o espacio de eventos

Para asignar probabilidad según Laplace es necesario tener claro el concepto de espacio de eventos. Decimos que dos eventos tienen la misma posibilidad (probabilidad) de ocurrencia si pertenecen al mismo espacio de eventos. Para el experimento de lanzar un dado no cargado, los resultados posibles $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es el espacio de eventos. En este experimento cada resultado tiene la misma probabilidad de ocurrencia.

$$P(A = 1) = (A = 2) = (A = 3) = (A = 4) = (A = 5) = (A = 6) = \frac{1}{6}$$

Recordando que un evento es un subconjunto del espacio muestral, y si $S$ denota el espacio muestral de un experimento aleatorio y $E_i$ denota un evento de ese espacio de eventos, se define la probabilidad, según Laplace, del evento $E_i$ así:

$$P(E_i) = \frac{|E_i|}{|S|}$$

Es decir, la probabilidad de que ocurra un evento llamado $E_i$, es igual al número de resultados $E_i$ entre el número de resultados posibles.

Se completa la definición anterior, sumando las siguientes condiciones. Si a cada punto del espacio muestral se asigna un número llamado la probabilidad de $E_i$ , lo escribimos $P(E_i)$ tenemos,

1. $0 \leq P(E_i) \leq 1$, para cada $i$
2. $\sum_s P(E_i) = 1$

El símbolo $\sum_s$ concentra la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales, eventos simples.

Supongamos el experimento de lanzar dos veces una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener un "sol"? sea A el evento sale "águila" y S el evento sale "sol". La tabla siguiente muestra todos los resultados posibles.

| $Evento$ | $Primer$ $lanzamiento$ | $Segundo$ $lanzamiento$ | $P(E_i)$ |
|---|---|---|---|
| $E_1$ | $A$ | $A$ | $1/4$ |
| $E_2$ | $A$ | $S$ | $1/4$ |
| $E_3$ | $S$ | $A$ | $1/4$ |
| $E_4$ | $S$ | $S$ | $1/4$ |

La probabilidad de obtener un "sol" incluye a los eventos simples $E_2\ y\ E_3$. Entonces, si $E_A$ es el evento obtener un "sol".

Notas de clase R. Urbán

$$P(E_A) = P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

***Ejemplo***. Se lanzan dos dados no cargados, suponemos que cualquier resultado que se obtiene tiene la misma probabilidad de ocurrir Se requiere determinar la probabilidad de que la suma de los resultados que muestran en la cara superior de los dos dados es 8.

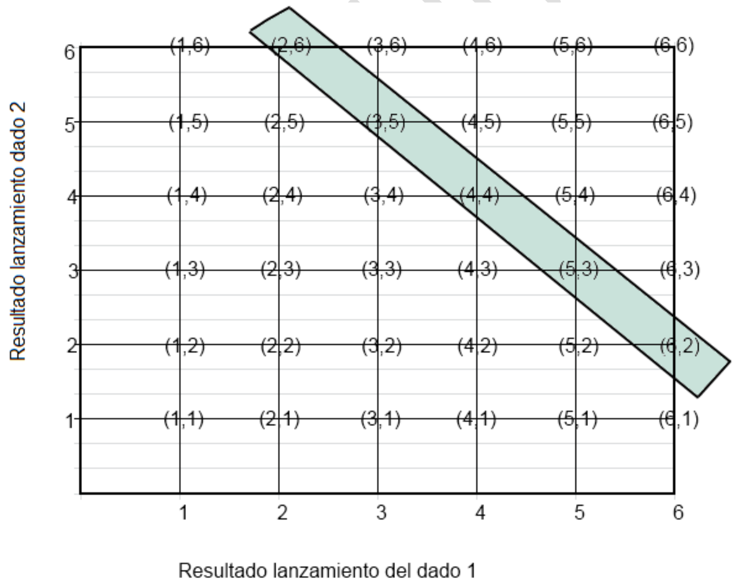
En este ejemplo, el espacio de evento tiene 36 resultados posibles, 6 para cada dado. que se pueden visualizar en el siguiente diagrama:

*Solución*. El espacio de eventos es el que se muestra en el diagrama anterior. Tenemos 36 resultados posibles y 5 eventos en los que la suma de sus caras es igual a 8. Estos son:

Sea $E_8 =$ evento suma 8 al lanzar 2 dados una vez.

La probabilidad

$P(E_8) = \frac{5}{36} \approx 0.14$




Como podemos apreciar, es muy importante establecer con claridad el espacio de eventos, para poder asignar probabilidad y que todos los eventos sean equiprobables para poder usar correctamente la fórmula de Laplace.

***Ejemplo.*** Se tienen 30 bolas en una urna y extraemos una al azar. Todas las bolas tienen la misma probabilidad de ser extraída. Es decir, que la probabilidad de extraer una bola determinada es 1 /30, sin importar el color. Si la urna tiene 20 bolas de color verde y 10 de color azul. Encontrar la probabilidad de extraer al azar una bola azul.

*Solución.* La urna contiene bolas de dos colores: verde y azul. El espacio muestral es S = {verde, azul} y si se aplica la fórmula de Laplace para calcular la probabilidad de extraer una bola azul, se tiene que es 1/2; pero este resultado es erróneo, debido a que los eventos azul y verde en el espacio muestral S no tienen la misma posibilidad de ocurrencia, no son eventos simples.

Para obtener un resultado correcto, el espacio debe incluir todas las pelotas. En este ejercicio tenemos 20 bolas verdes y 10 azules. De esta manera el espacio de eventos son 30 pelotas. Finalmente, la probabilidad de extraer una bola azul es $\frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0.33$, es decir si repetimos el experimento varias veces, regresando a la urna la bola obtenida, el 33% de las veces obtendremos una bola azul.

### *9.12.5 Diagrama de árbol.*

Es un método útil para obtener una representación gráfica de todos los resultados de un experimento junto con sus probabilidades. La utilidad de este esquema es para asegurarnos de haber identificado todos los eventos simples y su probabilidad asociada.

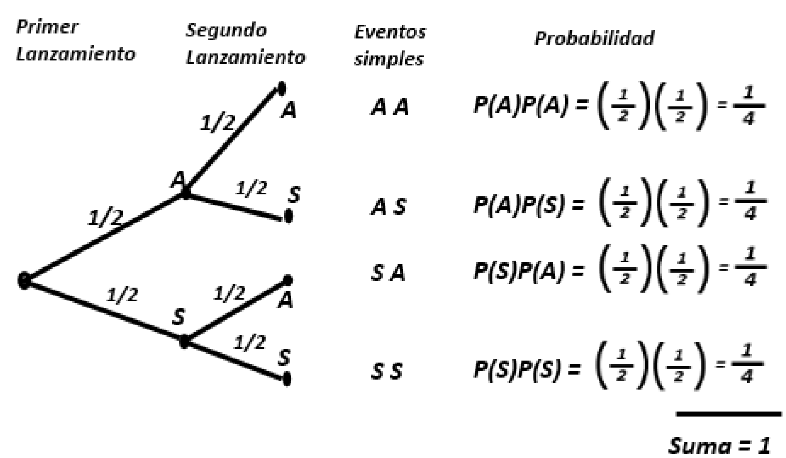
La construcción del diagrama inicia poniendo una rama para cada uno de los eventos simples, acompañados de su probabilidad. Al final de cada rama, se dibujan a su vez nuevas ramas hasta llegar al final del experimento. Es importante recordar que la suma de probabilidades de las ramas en cada reinicio debe ser uno. Para ilustrar el proceso de construcción del diagrama, supongamos el experimento de lanzar una moneda dos veces. Los eventos posibles son dos, águila y sol.

Si llamamos a $A$ el evento sale águila y al evento $S$ sale sol. Los resultados posibles, como ya hemos visto son,

$$SS, SA, AS, AA$$

El esquema de árbol será aplicable si los resultados del experimento se pueden dividir en etapas. Para el lanzamiento de la moneda, una primera etapa sería el primer lanzamiento, etc. Las ramas que surgen de un nodo en particular son los eventos que pueden ocurrir en ese punto.

El origen es el nodo inicial y las ramas son los eventos simples que corresponden a cada etapa. De esta manera el diagrama de árbol para nuestro ejercicio quedaría así,




Notas de clase R. Urbán

Una vez construido el diagrama, podemos encontrar la probabilidad de otros eventos, como, por ejemplo, si $Z$ es el evento obtener un sol, la probabilidad de este evento es,

$$P(Z) = P(A)P(S) + P(S)P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

### *9.12.6 Conteo de puntos muestrales.*

Para aplicar la Regla de Laplace, el enfoque clásico de la probabilidad, el cálculo de los sucesos favorables y de los sucesos posibles a veces no plantea ningún problema, ya que son un número reducido y se pueden calcular con facilidad. Sin embargo, en ocasiones deducir el espacio de eventos es complejo y hay que aplicar algunas reglas matemáticas que nos ayuden a contar y definir el espacio de eventos.

Supongamos, por ejemplo, una fábrica de chocolates que dispone de cinco sabores de relleno distintos (vainilla, café, nuez, fresa y almendra) y quiere fabricar chocolates de dos sabores ¿cuántos tipos distintos de chocolate podrán fabricar?

Para contestar la pregunta anterior, nos apoyaremos en reglas matemáticas, como las de permutaciones y combinaciones, que nos ayudaran con el cálculo.

#### *9.12.6.1 Regla $mn$*

El principio fundamental en el proceso de contar ofrece un método general que se aplica a situaciones en las que se busca; el número de maneras distintas en las que se pueden seleccionar pares de objetos que se seleccionan de grupos distintos. El experimento se realiza en diferentes etapas.

Si un evento puede ocurrir de $m$ maneras y otro de $n$ maneras diferentes entonces, el número total de formas diferentes en que ambos eventos pueden ocurrir en el orden indicado, es igual a $mn$. Por ejemplo, el experimento de lanzamiento de dos dados.

En este caso, tenemos $n = 6$ del primer dado y $m = 6$ del segundo, el número de resultados posibles será, $mn = 6x6 = 36$.

> Con $m$ elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_m$ y $n$ elementos $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots.b_n$, es posible formar $mn$ pares que contegan un elemento de cada grupo.

La regla se puede generalizar para un mayor número de objetos. Por ejemplo, ¿Cuántos puntos muestrales hay en el espacio muestral asociado al experimento de lanzar tres monedas?

$$2 * 2 * 2 = 8$$



Notas de clase R. Urbán

Finalmente, cuando el espacio de eventos se modifica por el resultado anterior, como en el siguiente caso, ¿De cuántas maneras se pueden repartir 3 premios a un grupo de 7 personas, si una persona no- puede obtener más de un premio?

En este caso, tendríamos 7 personas que podrían obtener el primer premio, 6 candidatos al segundo premio y 5 al tercer premio; entonces, el número de maneras distintas de repartir los tres premios es,

$$7 \text{ x } 6 \text{ x } 5 = 210$$

#### *9.12.6.2 Permutaciones*

La regla $mn$ es de utilidad para determinar el espacio de eventos cuando tenemos dos o más grupos, sin considerar el orden en que se presentan. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, el resultado (2,5) o (5,2) es irrelevante la disposición en que se presenta el resultado. Por otro lado, si importa el orden en que se disponen $k$ objetos de un total de $n$, a este número total de resultados posibles le llamamos permutación.

Por ejemplo, si tenemos 4 puestos en una organización; presidente, secretario, tesorero y asistente. De cuantas maneras podemos formar este comité de un grupo de 4 candidatos. En este ejemplo, el orden importa ya que no es lo mismo ser el presidente, el secretario, el tesorero o el asistente. El número total de resultados o de formas como podríamos acomodar 4 personas para 4 puestos sería[19]

$$4 \quad x \quad 3 \quad x \quad 2 \quad x \quad 1 \quad = 24$$

Para elegir presidente tenemos 4 candidatos, el secretario se elige de los 3 candidatos restantes, lo mismo para los otros puestos. Es decir, cada decisión que vamos a tomar comprende una opción menos que la anterior.

---

[19] Esta forma de operación aritmética es conocida como el factorial de un número, en nuestro caso se representa como 4! Que se lee “cuatro factorial”. El resultado se obtiene de multiplicar el número inicial por todos los enteros menores hasta llegar a la unidad. Por ejemplo,

$$4! = \ 4\,x\,3\,x\,2\,x\,1 = 24$$
$$6! = 6\,x\,5\,x\,4\,x\,3\,x\,2\,x\,1 = 720$$
$$(6-4)! = 2! = \ 2\,x\,1 = 2$$

Los factoriales pueden incluir operaciones. En estos casos, se efectúa primero la operación y después el factorial, como en el último ejemplo.



Notas de clase R. Urbán

Si en este ejemplo, tenemos 10 candidatos para ocupar los 4 puestos. Entonces el número de grupos diferentes que podemos formar es,

$$10 \ \ x\, 9\, x\, 8\, x\, 7 = 5040 \text{ grupos diferentes.}$$

En síntesis, llamaremos una ***permutación***, al total de maneras de ordenar $n$ objetos distintos tomados de $r$ cada vez y utilizaremos la expresión $P_r^n$ para indicar este cálculo.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$n \geq r$
No entran todos los elementos
Si importa el orden
No se repiten los elementos

Así, el número de formas en que se puede formar un comité de 4 puestos de un grupo de 10 personas es

$$P_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{3628800}{720} = 5040$$

***Permutaciones con repetición***

En algunos casos, requerimos formar grupos de $r$ objetos tomados de $n$, pero algunos de estos no son distinguibles entre ellos. Por ejemplo, supongamos que contamos con 3 monedas de diez pesos y 2 de cinco ¿cuántos montones diferentes podemos formar?, en este caso no hay distinción entre las monedas de diez pesos, ni entre las de cinco pesos.

Para calcular el número de permutaciones con repetición utilizaremos la siguiente fórmula:

$$P_{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_r}^{m} = \frac{m!}{x_1!x_2!x_3!\ldots\ldots x_r!}$$

$m = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r$
Si entran todos los elementos
Si importa el orden
Si se repiten los elementos

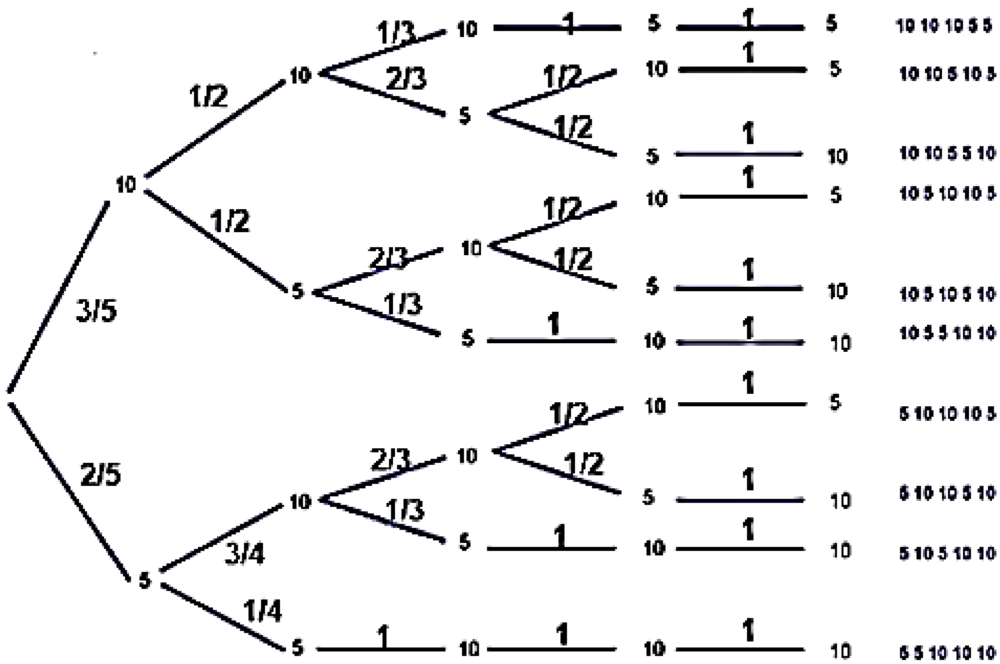
Son permutaciones de "$m$" elementos, de los que podemos formar grupos de $x_1$ elementos iguales, o no diferenciables, otro grupo de elementos $x_2$, hasta el último de ellos, $x_r$ que tiene r elementos iguales.

Para el ejemplo anterior tendremos:

$$P_{3,2}^{5} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5x4x3!}{3!\,2x1} = \frac{20}{2} = 10$$

Notas de clase R. Urbán

Gráfica xxxxx. Diagrama de árbol para el ejemplo de las monedas.




***Ejemplo***: Calcular las permutaciones de 9 elementos, en los que uno de ellos se repite 4 veces, otro en 3 ocasiones y el último 2 veces.

$$P^9_{4,3,2} = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = \frac{362880}{288} = 1260$$

Es decir, podríamos formar 1260 permutaciones de estos elementos.

Un caso especial de las permutaciones con repeticiones es cuando; para un conjunto de eventos dado, cada posición puede ocuparse por cualquiera de los *m* elementos.

$$P_{nm} = n^m$$

Para cualquier par de números $m, n$
No entran todos los elementos
Si importa el orden
Si se repiten los elementos

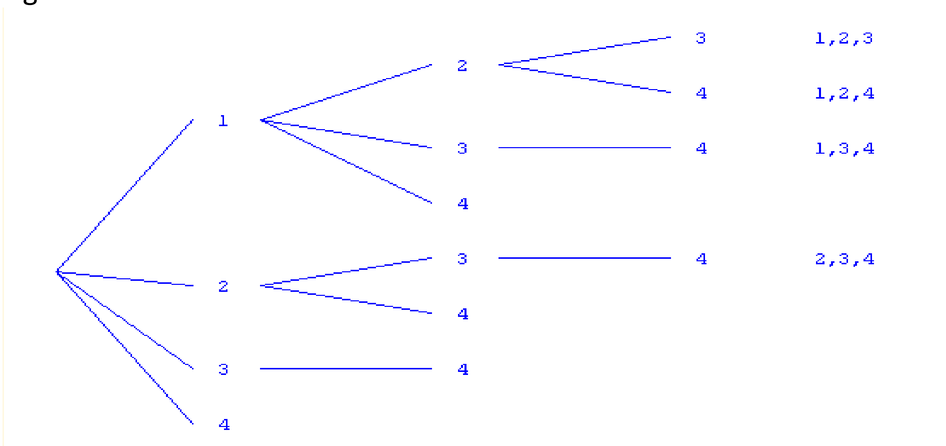
***Por ejemplo***. Una quiniela deportiva consiste en 12 juegos y cada juego tiene tres resultados posibles, gana, empata o pierde. ¿Cuántas formas posibles tendremos para llenar esta quiniela con solo un resultado por partido?

$$P_{3,12} = 3^{12} = 531{,}441$$

### 9.12.6.3 Combinaciones

Son los grupos de $n$ elementos distintos que se pueden formar con $m$ elementos. Los grupos son diferentes en algún elemento y no en el orden de colocación; es decir cada grupo se diferencia del resto en los elementos que lo componen, sin importar el orden.

Por ejemplo, si representamos en un diagrama de árbol las combinaciones de 4 números $\{1,2,3,4\}$ tomando solo tres de ellos a la vez, es decir podemos tomar formar los siguientes números




***Ejemplo.*** Calcular las combinaciones de 2 elementos que se pueden formar con los números 1, 2 y 3.

Se pueden establecer 3 parejas diferentes: (1,2), (1,3) y (2,3). En el cálculo de combinaciones las parejas (1,2) y (2,1) se consideran idénticas, por lo que sólo se cuentan una vez.

Para calcular el número de combinaciones se aplica la siguiente fórmula:

$$C_n^m = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

No importa el orden
No hay repetición
Si se consideran todos los elementos

La expresión $C_n^m$ representa las combinaciones de "$m$" elementos, formando subgrupos de "$n$" elementos.

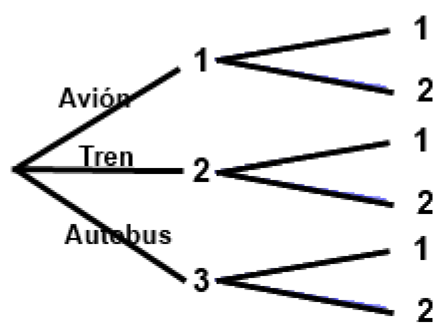
***Ejemplo:*** $C_4^{10}$ son las combinaciones de 10 elementos agrupándolos en grupos de 4 elementos:

$$C_4^{10} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{(4*3*2*1)(6*5*4*3*2*1)} = 210$$

Es decir, podríamos formar 210 grupos diferentes de 4 elementos, a partir de los 10 elementos.

***Ejemplo.*** Una empresa que comercializa sus productos por internet utiliza para él envió de sus productos tres medios de transporte; avión, tren y autobús. Estos, a su vez, utilizan dos rutas diferentes. ¿cuántas formas distintas tiene para el envío de sus productos?

Si trazamos un diagrama de árbol,




Para la solución obtenemos las combinaciones de los diferentes medios de transporte multiplicados por las combinaciones de las rutas.

$$C_1^3 * C_1^2 = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} * \frac{2!}{1!\,(2-1)!} =$$

$$= \frac{3 * 2!}{2!} * \frac{2!}{1!} = 3 * 2 = 6$$

Seis maneras de envío de los productos

***Combinaciones con repetición:***

Son combinaciones de $m$ elementos tomados de $n$ en *n,* en los que los distintos grupos de *n* elementos pueden ser iguales o distintos. A diferencia de las combinaciones anteriores, un elemento puede repetirse en un grupo. Por ejemplo,

Si tenemos un conjunto de elementos $\{1,2,3,4\}$, ¿cuántos grupos de tres elementos se pueden formar con repetición?

Los grupos serían,

$$\{1,1,1\}, \{1,1,2\}, \{1,1,3\}, \{1,1,4\}, \{1,2,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,3\}, \{1,3,4\}, \{1,4,4\}$$
$$\{2,2,2\}, \{2,2,3\}, \{2,2,4\}, \{2,3,3\}, \{2,3,4\}, \{2,4,4\}, \{3,3,3\}, \{3,3,4\}, \{3,4,4\}, \{4,4,4\}$$

Como se puede apreciar algunos grupos incluyen elementos iguales o repetidos, de esta manera se forman 20 grupos distintos de cuatro elementos tomados de tres. Por supuesto que sigue siendo válido que se consideran grupos idénticos los que tienen los mismos elementos como $\{1,2,2\}$ y $\{2,1,2\}$

Para calcular el número de combinaciones con repetición se aplica la siguiente fórmula:

$$C_n'^m = \frac{(m+n-1)!}{n! * (m-1)!}$$

Notas de clase R. Urbán

***Ejemplo***: $C'^{10}_{4}$ son las combinaciones de 10 elementos con repetición, agrupándolos en grupos de 4, en los que 2, 3 o los 4 elementos podrían estar repetidos:

$$C'^{10}_{4} = \frac{13!}{4! * 9!} = \frac{13 * 12 * 11 * 10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(4 * 3 * 2 * 1)(9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1)} = 715$$

Se pueden formar 715 grupos diferentes de 4 elementos.

***Ejercicio***. Calcular la probabilidad de acertar los 9 partidos de una quiniela deportiva.

Se aplica la Regla de Laplace (casos favorables / casos posibles). El caso favorable es tan sólo uno (acertar los 9 partidos). Los casos posibles se calculan como variaciones con repetición de 3 elementos (local, empate, visitante). Por ejemplo,

| Equipos | Local | Empate | Visita |
|---|---|---|---|
| Partido 1 | X | | |
| Partido 2 | | X | |
| …… | | | X |
| Partido 9 | | | |

De esta manera tendríamos 9 resultados y cada uno de ellos con 3 opciones. Es decir, podemos tener un primer resultado, cada casilla corresponde a un partido y puede tomar algún valor de L=local, E=empate y V=visitante.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | V | L | E | V | E | L | V | E |

Cada casilla, o partida, puede tener tres resultados posibles.

El problema es de permutaciones porque el orden influye: no es lo mismo $(0, 0, X)$ que $(0, X, 0)$, el resultado se puede repetir hasta 9 veces.

Por lo tanto, los casos posibles son:

$$P_{mn} = n^m = 3^9 = 19683$$

La probabilidad de acertar los 9 resultados es:

$$P(A = 9\ aciertos) = \frac{1}{19683} = 0.0000508$$

***Ejercicio***. La probabilidad de acertar 7 juegos de la quiniela:

Aplicamos nuevamente la Regla de Laplace. Los casos favorables se calculan como combinaciones de 9 elementos tomados de 2 en 2, de esta manera obtenemos todas las posibles alternativas de fallar 2 resultados de 9 (lo que equivale a acertar 7 resultados).

Notas de clase R. Urbán

Se utiliza la fórmula para combinaciones ya que el orden de los resultados de la quiniela no importa, da lo mismo fallar el 3º y el 6º, que el 6º y el 3º.

$$C_2^9 = \frac{9!}{2! * (9-2)!} = 36$$

Los casos posibles siguen siendo los mismos: $P_{9*3} = 3^9 = 19683$. Por lo que la probabilidad de acertar 7 resultados es:

$$P(A = 7\ aciertos) = \frac{36}{19683} = 0.00183$$

Es más probable acertar 7 resultados que 9.

***Ejercicios***

1. *Para las siguientes situaciones, indique cual es el enfoque mas adecuado para asignar probabilidad (**S**ubjetiva, **F**recuentista, **C**lásica)*
    a. *La probabilidad de que la inflación baje el siguiente año.*
    b. *La probabilidad de que una acción baje suba o permanezca sin cambio.*
    c. *La probabilidad de obtener un as de corazones en un mazo de 52 cartas.*
    d. *En un experimento de lanzar un dado dos veces, la suma de los puntos sea igual a 9*
    e. *La probabilidad de que un artículo adquirido por internet se regrese porque sea defectuoso, si 2 de cada 10 se regresan.*
    f. *La probabilidad de que salario de un obrero aumente en un 8%, si en los últimos dos años solo ha aumentado en 2%.*
2. *En una urna se tienen cuatro pelotas; una verde, roja, negra y blanca. Si se extraen tres bolas al azar, construya el espacio de eventos.*
3. *Se lanza una moneda tres veces. Construya el diagrama de árbol correspondiente y obtenga,*
    *2.1 La probabilidad de obtener exactamente un sol.*
    *2.2 La probabilidad de obtener exactamente dos águilas.*
    *2.3 La probabilidad de obtener tres soles.*
4. *Un chofer de un camión puede tomar cualquiera de tres carreteras para ir de la ciudad $A$ a la $B$ y para ir de la ciudad $B$ a la $C$ puede tomar cualesquiera de $4$ carreteras. Finalmente, para ir de $C$ a la ciudad $D$ tiene 3 caminos posibles. Si para ir de $A$ a $D$ debe de ir de $A$ a $B$ y de $B$ a $C$ y de $C$ a $D$ ¿Cuántas rutas posibles tiene para ir de $A$ a $D$?*
5. *De cuántas maneras puede formarse un equipo de 11 jugadores de foot-ball de un grupo de 30 personas, sin considerar las posiciones de cada jugador. ¿Si el grupo*

Notas de clase R. Urbán

*consiste en 10 defensas y 20 delanteros? ¿De cuántas maneras puede elegirse un equipo de 4 defensas y 7 delanteros?*

6. *La fuerza de trabajo está compuesta del 70% de hombres y el 30% de mujeres. Si el 20% de los hombres tienen más de 2 trabajos, y 5% de las mujeres tienen 2 o más trabajos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que tiene más de un trabajo sea una mujer?*
7. *Si el experimento es arrojar una moneda 4 veces, a) ¿cuántos y cuáles son los resultados posibles que se pueden obtener? b) ¿cuántos casos hay en que salgan 2 caras y 2 cruces?*
8. *Un alumno tiene que elegir 7 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas maneras puede elegirlas? ¿Y si las 4 primeras son obligatorias?*
9. *Suponga que una persona tiene 8 acciones de ocho empresas distintas y que piensa heredar a sus tres hijos de la siguiente manera: 3 al mayor de sus hijos, 3 al segundo y 2 al menor ¿De cuántas maneras puede repartir las acciones?*
10. *Una organización de productores va a vender 100 sacos de café de calidad y 10 de baja calidad. ¿cuál es la probabilidad de seleccionar en forma aleatoria 3 sacos de los cuales dos son de calidad y uno de baja calidad?*

### *9.12.8 Combinación de Eventos*

Si $A$ y $B$ son dos eventos en el espacio muestral $S$. La unión de $A$ y $B$ es el evento que contiene a todos los puntos muestrales de $A$ o de $B$ o de ambos. Se denota la unión de $A$ y $B$ por el símbolo $A \cup B$.

Por otro lado. Sean $A$ y $B$ dos eventos en el espacio muestral S. La intersección de $A$ y $B$ es el evento que contiene a los puntos muestrales que están en ambos $A$ y $B$. La intersección se representa por el símbolo $A\,B$ o bien como $A \cap B$.

***Ejemplo.*** Una organización cuenta con la opción de invertir en dos de cuatro tipos de acciones en bolsa. El organización ignora que, de esos cuatro tipos, solo dos aumentarán su valor los próximos cinco años. Si eligen dos acciones al azar, haga una lista de los puntos muestrales de S y una lista de los siguientes eventos:

a. A: Escoger por lo menos uno de los tipos de acción redituable.
b. B: Escoger por lo menos uno de los tipos de acción no redituable.
c. $A \cap B$
d. $A \cup B$.

El espacio de eventos es, elegir 2 de cuatro acciones, los eventos son los siguientes, si $A_1$, $A_2$ son las acciones redituables y $B_1$ y $B_2$, son las acciones no redituables, el espacio de eventos son una combinación, no importa el orden,



Notas de clase R. Urbán

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6$$

$$\{A_1, A_2\}, \{A_1, B_1\}, \{A_1, B_2\}, \{A_2, B_1\}, \{A_2, B_2\}, \{B_1, B_2\}$$

a) $P(A) = P(A_1, A_2) + P(A_1, B_1) + P(A_1, B_2) + P(A_2, B_1) + P(A_2, B_2)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

b) $P(B) = P(A_1, B_1) + P(A_1, B_2) + P(A_2, B_1) + P(A_2, B_2) + P(B_1, B_2)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

c) $P(A \cap B) = P(A_1, B_1) + P(A_1, B_2) + P(A_2, B_1) + P(A_2, B_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

d) $P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

Con algebra de conjuntos

$A \cup B = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = 1$

### *9.12.9 Eventos complementarios*

El complemento de un evento A es la colección de todos los puntos muestrales que están en el espacio muestral S pero que no están en A. El complemento de $A$ se escribe $\overline{A}$.

De la primera ley de probabilidades sabemos que $\sum_s P\,(E_i) = 1$, entonces se tiene que;

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Así, obtenemos una ecuación de gran utilidad para obtener $P(A)$ cuando $P(\overline{A})$ es conocido

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

De esta manera podemos asignar probabilidad de ocurrencia a dos eventos que se encuentran relacionados, es decir que la ocurrencia de uno depende de si el otro ha o no ocurrido. No pueden ocurrir al mismo tiempo; por ejemplo, el sexo al nacimiento no puede ocurrir que sea niña o niño al mismo tiempo.

La probabilidad de un evento que no puede ocurrir o un evento imposible es cero. Si el espacio de eventos es $S$, entonces el evento imposible es

$$\overline{S} = \emptyset$$

De esta manera,

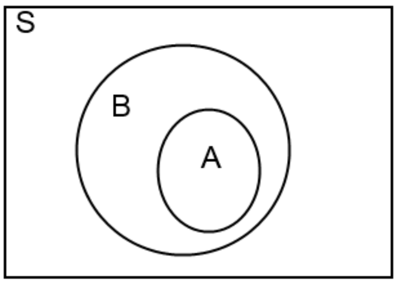
$$P(\emptyset) = 1 - P(S) = 0$$

Notas de clase R. Urbán

Finalmente, si dados dos conjuntos $A$ y $B$ de eventos donde $A \subset B$. Si *A* es un subconjunto o igual a *B*, entonces

$$P(A) \leq P(B)$$

Así, si el evento A puede ocurrir solo si B ocurre, porque A es un subconjunto de B, entonces la probabilidad de A es menor que la probabilidad de B,




$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Si A es un subconjunto B, $(A \cap B) = A$ sustituimos y

$$B = A \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$$

***Ejemplo.*** Supongamos que seleccionamos un estudiante al azar y registramos el ingreso familiar mensual. Si los eventos son

$A$, que el ingreso familiar sea mayor de \$14,000 pesos
$B$, un ingreso familiar de al menos \$6,000 pesos.

Es claro que A es un subconjunto de B. De esta manera, la probabilidad de $A$ es menor que la probabilidad de $B$.

***Ejemplo.*** Se tiran dos dados no cargados. Indique la probabilidad de que:

a) Obtener dos 3 b) Obtener dos 4 c) No salga el 5
d) Obtener al menos un 5 e) No salga el 5 ni el 6
f) Salgan solamente números pares

El espacio muestral es el siguiente:

$$E = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

*Solución* a) 1/36 b) 1/36 c) 25/36 d) 11/36 e) 16/36 f) 9/36

Se llaman eventos ***mutuamente exclusivos***, si no tienen elementos en común, o si no pueden ocurrir al mismo tiempo. La intersección $A \cap B$ no contiene eventos simples.

Por ejemplo, sacar una carta de un mazo y obtener Rey y Reina, no es posible al mismo tiempo. Los eventos son mutuamente excluyentes. Sin embargo, si es posible obtener un rey y que sea de diamantes, al mismo tiempo. Estos no son eventos mutuamente excluyentes.

### *9.12.10 Ley aditiva de la probabilidad.*

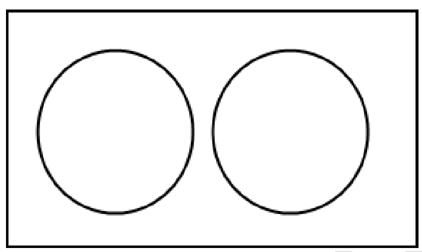
Si A y B son mutuamente exclusivos, la probabilidad de la unión de A y B es igual a la suma de las probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

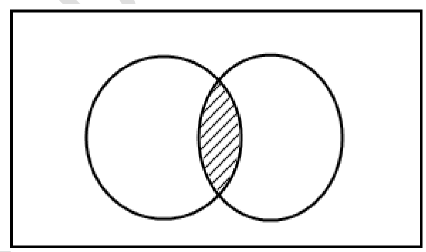
Si no son mutuamente exclusivos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

*Gráfica 9. xx Eventos Mutuamente exclusivos*



*Gráfica 9.xx Eventos no mutuamente exclusivos*



***Ejemplo.*** Una publicación de un periódico nacional reporta que, según una encuesta de opinión, el 40% de sus suscriptores leen la sección de noticias nacionales, el 32% leen sección de deportes y el 11% leen ambas secciones.

Si los eventos A y B son los siguientes:

a. A: evento de que un suscriptor que lea las noticias Nacionales.
b. B: evento que un suscriptor lea los deportes.

Encuentre las probabilidades de los eventos $A, B\ AB\ y\ A \cup B$

El experimento consiste en seleccionar al azar un suscriptor y registrar las secciones de la publicación que lee.

$$P(A) = .4$$
$$P(B) = .32$$

Como el 11% lee ambas secciones del periódico $P(AB) = .11$ de donde

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = .40 + .32 - .11 = .61$$

***Ejemplo***. En una comunidad agrícola, el 60% de las personas son productores agrícolas con tierra de temporal y el 40% restante son productores con tierra de riego. El 35% de la población siembra maíz y el 25% siembra frijol. El 20% de los productores de temporal siembra maíz. El 10% de la población son temporales y siembran frijol. El 15% de los productores siembra maíz y frijol. El 5% de los productores de temporal siembran maíz y frijol.

Calcule las probabilidades de que, al elegir un productor al azar,

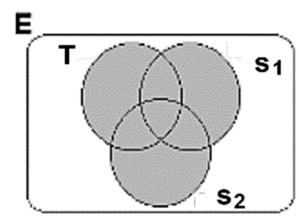
a) Sea un productor de temporal, que siembre maíz o que siembre frijol (es decir, que tenga por lo menos una de esas 3 características.
b) No siembre maíz
c) sea un productor de riego y no siembre maíz ni frijol.

*Solución.*

Definimos los eventos:
T: Agricultor con tierra de temporal
$S_1$: Agricultor siembra frijol
$S_2$: Agricultor siembra maíz.

$P(T) = 0.6$ $\quad$ $P(S_2) = 0.35$ $\quad$ $P(S_1) = 0.25$
$P(T \cap S_2) = 0.2$ $\quad$ $P(T \cap S_1) = 0.1$ $\quad$ $P(S_1 \cap S_2) = 0.15$
$P(T \cap S_1 \cap S_2) = 0.05$

a) Nos piden $P(T \cup S_1 \cup S_2)$. Por la generalización de la quinta consecuencia para 3 sucesos, sabemos que:

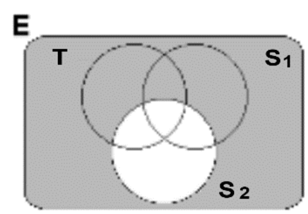



$P(T \cup S_1 \cup S_2) = P(T) + P(S_1) + P(S_2) - P(T \cap S_1) - P(T \cap S_2) - P(S_1 \cap S_2) + P(T \cap S_1 \cap S_2)$

Y en este caso, todos los sumandos del lado derecho de la igualdad son dato. Entonces obtenemos:

$P(T \cup S_1 \cup S_2) = 0.6 + 0.25 + 0.35 - 0.1 - 0.2 - 0.15 + 0.05 = \mathbf{0.8}$

b) El suceso "no siembre maíz" es la negación del evento "sembrar maíz". Es decir, es el complemento de $S_2$. La segunda consecuencia nos dice que $P(S_2) + P(\overline{S_2}) = 1$, con lo cual:




$$P(\overline{S_2}) = 1 - P(S_2) = 1 - 0.35 = \mathbf{0.65}$$

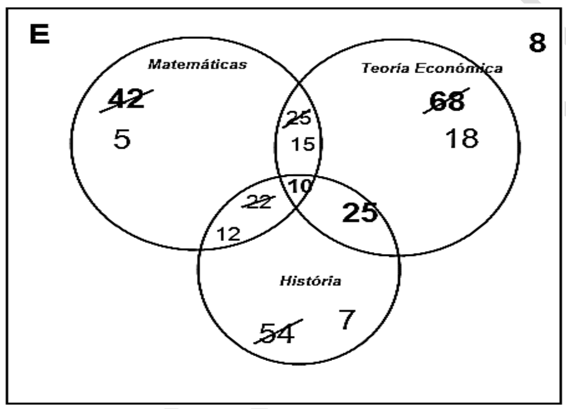
c) Aquí el razonamiento es similar al del punto anterior. Si el productor elegido es de riego y no siembre maíz ni frijol, no tiene ninguna de las 3 características $T$, $S_1$ y $S_2$, la respuesta está en el complemento del conjunto $T \cup S_1 T \cup S_2$.

Notas de clase R. Urban

La segunda consecuencia dice que $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, con lo cual si llamamos: $A = T \cup S_1 \cup S_2$ entonces lo que estamos buscando es $P(\overline{A})$, y como conocemos $P(A)$, hacemos:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.8 = \mathbf{0.2}$$

***Ejemplo***. Un grupo de 100 estudiantes de Economía, cursan las siguientes materias, 42 Matemáticas, 68 Teoría Económica, 54 Historia; 22 estudiantes cursan Matemáticas e Historia y 25 Matemáticas y Teoría Económica. Además, 7 estudiantes estudian Historia, pero no Matemáticas ni Teoría Económica. Finalmente 10 estudiantes están en las tres materias y 8 de ellos en ninguna de estas asignaturas. Si se selecciona un estudiante al azar,




a) ¿Cuál es la probabilidad de curse las tres asignaturas?

$$P(M \cap TE \cap H) = \frac{10}{100} = 0.1$$

b) ¿La probabilidad de que un estudiante de Teoría Económica curse matemáticas e Historia?

$$P(estudiante\ de\ TE\ y\ que\ curse\ M \cap H) = \frac{10}{68} = 0.147$$

c) ¿La probabilidad de que un estudiante curse matemáticas e Historia, pero no Teoría Económica?

$$P(curse\ M \cap H, pero\ no\ TE) = \frac{12}{5 + 12 + 7} = 0.5$$

d) ¿Probabilidad de que el estudiante curse al menos una de las tres materias, Matemáticas, Teoría Económica o Historia?

$$1 - P(ninguna\ asignatura) = 1 - \frac{8}{100} = 0.92$$

***Ejercicios.***

1. *Para renegociar la cartera vencida de algunos de sus clientes, una institución financiera establece un plan de pagos, a uno, dos y tres años a una tasa de interés baja. La institución ofrece dos tipos de crédito; al consumo y personales. El cuadro siguiente muestra la distribución de la cartera.*

| *Tipo de crédito* | *Plan de pagos* | | |
|---|---|---|---|
| | *Un año* | *Dos años* | *Tres años* |
| *De consumo. Para pagar un bien o un servicio* | *25* | *30* | *55* |
| *Personal. Para la compra de un bien* | *75* | *40* | *35* |

   *Un grupo de 260 personas son aprobadas para acceder a estos beneficios. Si se selecciona al azar un cliente, encontrar la probabilidad de que,*
   1.1. *Sea elegida una persona con plan de pago de un año.*
   1.2. *Elegir una persona con un plan a dos años.*
   1.3. *Elegir una persona con plan de tres años.*
   1.4. *Elegir una persona que tenga un crédito personal*
   1.5. *El plan de pagos sea mayor a un año.*

2. *Una urna contiene nueve bolas rojas, cincos blancas y seis negras. Si se extraen tres bolas al azar, sin remplazo, determinar la probabilidad*
   2.1. *Obtener tres sean rojas*
   2.2. *Obtener tres blancas*
   2.3. *Al menos una sea negra*
   2.4. *Una bola de cada color*

3. *Se realiza un sondeo de opinión acerca de la preferencias de diversión de un grupo de estudiantes. El 35% prefiere ir al cine, el 25% prefiere un concierto y el 8% está interesado en ambas actividades. Cuál es la probabilidad de*
   3.1. *Ir al cine o a un concierto*
   3.2. *No ir al cine*
   3.3. *No ir al cine ni al concierto*
   3.4. *Ir al concierto, pero no ir al cine*

4. *En un referéndum, se hacen dos preguntas. El 45% respondió "sí" a la primera pregunta, el 30% respondió "sí" a la segunda pregunta y el 26% respondió "sí" a ambas preguntas.*
   4.1. *¿Cuál es la probabilidad de que una persona responda "sí" a alguna de las preguntas?*
   4.2. *¿Cuál es la probabilidad de que una persona responda "no" a ambas preguntas?*

5. *Un comerciante vendió a futuro maíz, al mismo tiempo compro un plantío de café a futuro. Si la probabilidad de que ambos productos suban de precio es de 0.30 y 0.65 respectivamente ¿cuál es la probabilidad de que pierda en ambas transacciones?*

Notas de clase R. Urbán

### 9.12.11 *Probabilidad Condicional.*

Cuando asignamos probabilidad, frecuentemente hacemos uso de conocimiento parcial del resultado del experimento. En el caso de la probabilidad condicional, estamos interesados en la probabilidad de que un evento ocurra dado que otro evento ha ocurrido u ocurrirá. Por ejemplo, podríamos estar interesado en conocer la probabilidad de que una acción de la bolsa aumente, dado que la inflación permanece constante; o bien, en la probabilidad de que las ventas de una empresa bajen, dado que el precio de un producto similar también baje. En estos casos estamos interesados en la probabilidad condicional; es decir, que un evento ocurra, dada la ocurrencia de un segundo evento.

Si se extraen 5 cartas de un paquete de baraja de póker. Supongamos que tenemos exactamente 3 corazones ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el as de corazones?

Si el evento $A$ son las manos que contienen el as de corazones y el evento $B$ son las manos que tienen exactamente tres corazones. Se puede estudiar el problema tomando el evento B como espacio muestral y estudiar el evento A dentro del evento B. Así, B es el número de manos que tienen exactamente tres corazones $\binom{13}{3}\binom{39}{2}$; calculamos el número de veces que sucede A dentro de B; es decir, el número de manos con exactamente tres corazones y uno de ellos es el As, este número es $\binom{12}{2}\binom{39}{2}$. De este modo se tiene que la probabilidad de que suceda A habiendo sucedido B es

$$P(B) = \frac{\textit{No de manos con exactamente tres corazones}}{\textit{No de manos posibles}} = \frac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}}$$

$$P(A) = \frac{\textit{No de manos con As de corazones y exactamente dos corazones}}{P(B)} = \frac{\frac{\binom{12}{2}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}}}{\frac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}}} = \frac{\binom{12}{2}\binom{39}{2}}{\binom{13}{3}\binom{39}{2}} = \frac{3}{13}$$

La probabilidad de A dado B se denota $P(A|B)$ y se puede calcular directamente del espacio muestral del experimento aleatorio original por medio de la fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observemos en el ejemplo previo que $P(B) = \frac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}}$ y que $P(A \cap B) = \frac{\binom{12}{2}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}}$ .

Luego

$$P(A|B) = \frac{3}{13}$$

Notas de clase R. Urbán

Si $A$ y $B$ son eventos del mismo experimento aleatorio y $P(B) > 0$ definimos la probabilidad condicional de A dado B así:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esta probabilidad se lee, la probabilidad de que ocurra $A$ dado que $B$ ocurre. También se puede expresar como,

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

***Ejemplo.***

Una sociedad financiera sabe que el 64% de sus clientes invierten en acciones de renta fija y el 23% están interesados en la inversión en bolsa de valores. El 47% de los clientes que invierten en renta fija también invierten en bolsa de valores. Se elige al azahar un cliente y se consideran los siguientes eventos

R: El cliente que realiza sus inversiones de renta fija.
V: El cliente realiza inversiones en bolsa de valores

Obtener la probabilidad de que si se sabe que un cliente está interesado en invertir en acciones de renta fija además tambien invierta en bolsa de valores.

$P(R) = 0.64 \;\; y \; P(R \cap V) = 0.47$

De esta manera la probabilidad de que un cliente que invierta en acciones de renta fija tambien invierta en bolsa de valores.

$$P(V|R) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{0.47}{0.64} = \mathbf{0.73}$$

***Ejemplo.*** En una ciudad el 55% de los habitantes consume pan integral, el 30% consume pan multigrano y el 20% consume ambos. Se pide:

a) Sabemos que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que coma pan multigrano?
b) Un habitante consume pan multigrano, ¿cuál es la probabilidad de que no consume pan integral?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa ciudad no consuma ninguno de los dos tipos de pan?

Sean los eventos
A: Una persona consume pan integral.

Notas de clase R. Urbán

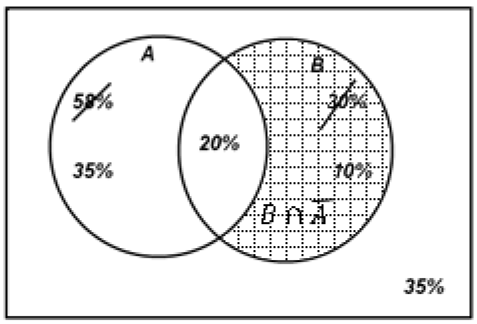
B: Una persona consume pan multigrano. Las probabilidades son

$P(A) = .55 \quad P(B) = ..30$ y $P(A \cap B) = .2$

a) Consume pan integral ¿cuál es la probabilidad de que coma pan multigrano?

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{.2}{.55} = 0.36$$

b) Consume pan multigrano ¿cuál es la probabilidad de que no consume pan integral?




$$P(B \cap \bar{A}) = .1$$

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(B)} = \frac{.1}{.3} = 0.33$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa ciudad no consuma ninguno de los dos tipos de pan?

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(B \cap A)]$$
$$= 1 - (.55 + .3 - .2) = .35$$

***Ejemplo.*** En una comunidad, la tercera parte de la población es vacunada en contra de una enfermedad. Después de un tiempo, se presentan quince casos de personas enfermas; de estas, dos de ellas están vacunadas. ¿Podemos concluir que la vacuna es eficaz? Si se sabe que, de 100 personas vacunadas, ocho están enfermas, ¿Qué proporción de la población están enfermos?
Sean los eventos,

E: Una persona enferma y
V: Una persona vacunada. La probabilidad $P(V) = {}^{1}/_{3}$

La probabilidad que una persona sea vacunada dado que estaba enferma

$$P(V|E) = {}^{2}/_{15}$$

De esta manera; que una persona enferme dado que fue vacunado,

$$P(V|E) = \frac{P(E \cap V)}{P(E)} = {}^{2}/_{15} \quad y \quad P(E|V) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)}$$

Notas de clase R. Urbán

Despejamos y sustituimos en la 2ª ecuación.

$$P(E|V) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V|E)P(E)}{P(V)} = \frac{2 * 3}{15} P(E) = \frac{2}{5} P(E)$$

Para que la vacuna sea eficaz se requiere que $P(E/V) < P(E)$.

Y la proporción de la población enferma,

$$P(E|V) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}, \ \ es\ decir \ \ \frac{2}{25} = \frac{2}{5} P(E)$$

De esta manera

$P(E) = \frac{1}{5}$ El 20% de la población está enferma.

Hasta ahora hemos obtenido la probabilidad condicional de dos eventos. Este concepto puede extenderse a más de dos variables, por ejemplo, la probabilidad de que un evento A ocurra dado que ocurren los eventos B y C. De la definición de probabilidad condicional,

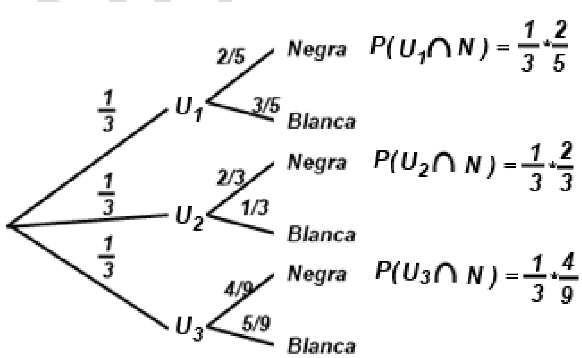
$$P(A|B, C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$$

La generalización a $n$ variables es evidente.

***Ejemplo***. Se tienen tres urnas. En la urna uno $U_1$ hay tres bolas blancas y dos negras, en la Urna $U_2$ dos bolas blancas y cuatro negras y en la urna $U_3$ cinco bolas blancas y cuatro negras. El experimento consiste en extraer una pelota de cada urna. Si se extrae exactamente una negra ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la urna $U_1$?

Si llamamos al evento, $U_1$ seleccionar la urna *uno*, $U_2$ la urna *dos* y $U_3$ seleccionar la urna *tres*, $N$ el evento extraer una bola negra, $B$ obtener una bola blanca.

Para la solución construimos un diagrama de árbol tendremos,




$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{P}(U_1 \cap \boldsymbol{N}) + \boldsymbol{P}(U_2 \cap \boldsymbol{N}) + \boldsymbol{P}(U_3 \cap \boldsymbol{N})$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} * \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} * \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} * \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}} = \mathbf{0.5}$$

Finalmente, la probabilidad de extraer de la urna $U_1$,

$$\boldsymbol{P}(U_1|\boldsymbol{N}) = \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} * \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}{\mathbf{0.5}} = \mathbf{0.266}$$

Notas de clase R. Urbán

### *9.12.12 Eventos Independientes*

Dos eventos $A$ y B de un mismo experimento aleatorio son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la ocurrencia del otro. Entonces, si el evento A ocurre, no cambia la probabilidad de que el evento B ocurra y viceversa.

Existen dos tipos situaciones en las cuales la ocurrencia de un evento no cambia la posibilidad de que otro evento salga.

a) Si un evento ocurre, no elimina la posibilidad de que el otro salga. Por ejemplo, al lanzar un dado o una moneda varias veces.
b) Si la ocurrencia de un evento modifica el resultado, pero el experimento se recupera a su estado original antes de que ocurra el siguiente evento. Por ejemplo, sacar una carta y devolverla al mazo, es decir con remplazo.

Cuando los eventos son independientes, la probabilidad de que todos ocurran es igual a la multiplicación de las probabilidades de que ocurran los eventos individuales.

$$P(A|B) = P(A). \text{ O bien } P(B|A) = P(B)$$

De esta manera

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad y \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Por consecuencia, si dos eventos son independientes, se cumple que,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

***Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes***

Recordemos que en un experimento no es posible que dos eventos simples ocurran al mismo tiempo, de aquí que, si los eventos son mutuamente excluyentes, cuando uno ocurre el otro no puede ocurrir; la intersección de estos dos eventos es vacía, o cero.

$$P(A \cap B) = 0$$

***Ejemplo*.** Se tiran dos dados y se observan el número de puntos de la cara superior. Calcule la probabilidad de que: a) No salga el 1; b) No salga ningún número impar.

Sean los eventos
A: que no salga uno en el primer dado.
B: que no salga uno en el segundo dado.

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) = \frac{5}{6} * \frac{5}{6} = 0.694$$

Notas de clase R. Urbán

Tomamos los mismos eventos $A$ y $B$, lo que estamos buscando es $P(A \cap B)$, lo cual según vimos se puede escribir como $P(A)\,P(B/A)$. En este caso particular, por considerarlos independientes, $P(B/A)$ termina siendo $P(B)$, y entonces llegamos al mismo resultado anterior.

$$P(A)\,P(B) = 0.694$$

La noción de independencia se puede generalizar para el caso de más de dos eventos. Por ejemplo, si tuviéramos tres eventos, digamos A, B y C; podemos decir que, si tres eventos son independientes, o también mutuamente independientes, se verifican necesariamente las siguientes relaciones,

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

***Ejemplo***. Si el experimento es lanzar dos veces un dado de 6 caras. ¿Los siguientes eventos son independientes?

a) Evento $A$, en el primer lanzamiento obtener un número par, $\{2,4,6\}$
b) Evento $B$, obtener en el segundo lanzamiento un número non $\{1,3,5\}$
c) Evento $C$, obtener en dos lanzamientos el mismo número $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

Los eventos $A$ y $B$ son independientes, para probarlo

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad y \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(A)P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Para que sean independientes se debe cumplir que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si el espacio de eventos es $6x6 = 36$ resultados; los eventos en la intersección de A y B son; $\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)(6,1),(6,3),(6,5)\}$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Se cumple la regla y los eventos son independientes, como se suponía.
$A$ y $C$ también son independientes. Si ocurre el evento $A$, el primer lanzamiento es un par y el segundo lanzamiento también debe resultar entonces par, la probabilidad en cada caso será,

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(A)P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$$

$$P(A \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Notas de clase R. Urbán

Como los eventos son independientes, la probabilidad condicional,

$$P(C|A) = P(C) = \frac{1}{2}$$

Finalmente, con un razonamiento similar podemos demostrar que $B$ y $C$ son también independientes.

$$P(B)P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$$

$$P(B \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

En conclusión, la independencia solo se puede probar mediante cálculos de probabilidades. No nos ayudan los diagramas de Venn ni podemos confiar en suposiciones.

Sean tres eventos $A, B$ y $C$, la probabilidad condicional de la unión de los tres eventos, cuando la $P(C) \neq 0$ es,

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$$

Esta relación expresa la probabilidad de la ocurrencia de $A$ o $B$, o ambos, si $C$ ocurre.
Si los eventos son independientes

$$P(A \cup B|C) = P(A) + P(B)$$

Igualmente, dados tres eventos $A$, $B$ y $C$, con la condición de que $P(B \cap C) \neq 0$,

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B|C)}{P(B|C)}$$

Este resultado se lee, la probabilidad de que $A$ ocurra dado que $B$ y $C$ ocurren.

Nuevamente, en el caso de independencia.

$$P(A|B \cap C) = P(A)$$

Para los eventos mutuamente exclusivos si ocurre $B$ el evento $A$ no puede ocurrir de manera que,

$$P(A|B) = 0$$

Así, para los eventos mutuamente excluyentes

$$P(A \cap B) = 0 \quad y \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Notas de clase R. Urbán

Si los eventos son dependientes,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \;\; y \;\; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Finalmente, dos eventos son independientes si obligatoriamente,

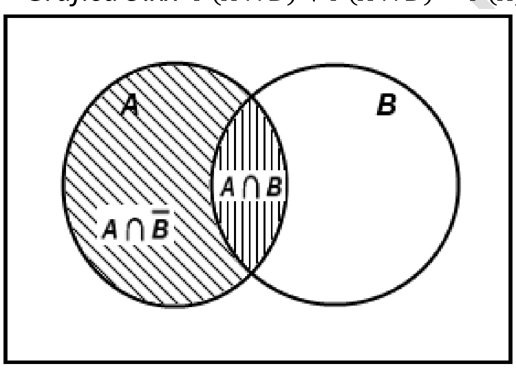
$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \text{ó} \quad P(B|A) = P(B)$$

Algunas relaciones útiles para encontrar las probabilidades condicionales $P(A|B)$, en particular para evaluar la probabilidad conjunta $P(A \cap B)$; que dos eventos ocurran al mismo tiempo y la probabilidad marginales $P(A)$.

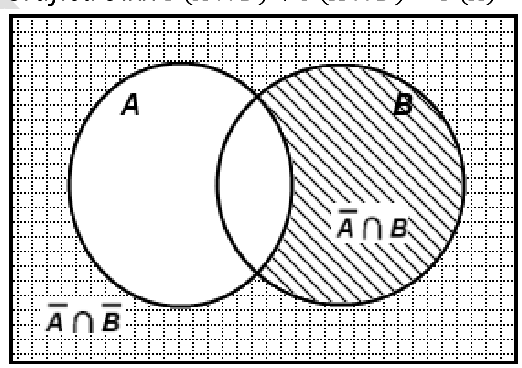
$$P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$$
$$P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$$
$$P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$$
$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})$$

Se ilustran en los siguientes diagramas de Venn.

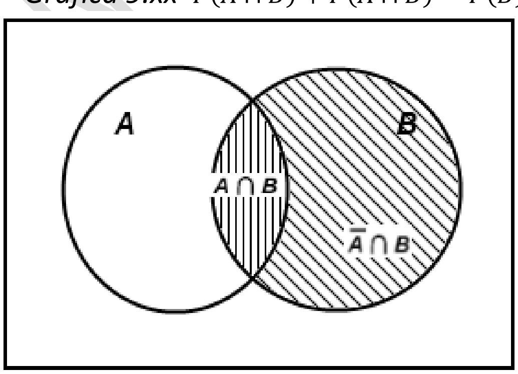
*Grafica 9.xx* $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$



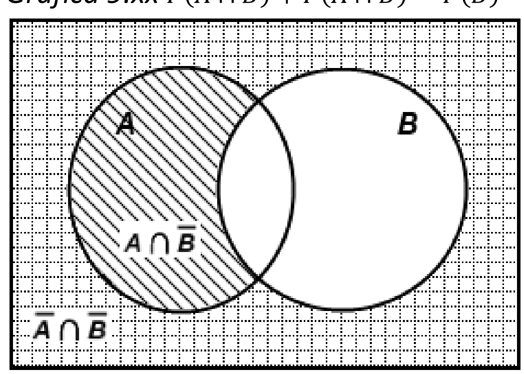

*Gráfica 9.xx* $P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$




*Gráfica 9.xx* $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$




*Gráfica 9.xx* $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})$



### *9.12.13 Ley multiplicativa de la probabilidad.*

Sean dos eventos $A$ y $B$, la probabilidad de que dos eventos ocurran simultaneamente, la probabilidad de la intersección recibe el nombre de ***Probabilidad conjunta.*** Para eventos dependientes,

$$P(A \cap B) = P(A)(B|A) = P(B)(A|B)$$

Si hay independencia, entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

***Ejemplo***, Se va a inspeccionar una entrega de 1500 sacos, 20 kilos cada uno, de café para su venta. Por experiencias anteriores se sabe que el 2% de los sacos tienen un peso inferior a 20 kilos. Si se seleccionan dos sacos ¿cuál es la probabilidad de que ambos sacos no tengan el peso correcto?

Sea $E_i$ el evento de que un saco seleccionado tenga un peso inferior a 20 kilos. Por lo tanto, la probabilidad de que el primer saco sea de peso inferior es $P(E_1) = 0.02$. La probabilidad de que el segundo saco este incompleto puede variar por el hecho de que el número de sacos es menor. Sin embargo, en virtud de que el cargamento es grande, podemos suponer independencia ya que por el tamaño del cargamento la probabilidad de un saco incompleto es la misma. De esta manera, la probabilidad de tener dos sacos incompletos es.

$$P(E_1E_2) = (0.02)(0.02) = 0.0004$$

***Ejemplo.*** Un paquete que contiene una mezcla de semillas de flores de distintos colores contiene cuatro semillas para flores rojas, tres para amarillas, dos para moradas y una para color naranja.

- Si se selecciona una semilla de la mezcla, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja o naranja? $\left(\frac{5}{10}\right) = \frac{1}{2}$
- Si se sacan dos semillas del paquete, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean amarillas? ¿ambas sean rojas?

$$P(2\ amarillas) = \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{6}{90} \quad y \quad P(2\ rojas) = \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{3}{9}\right) = \frac{12}{90}$$

- Si se sacan tres semillas, ¿cuál es la probabilidad de que una sea color naranja y dos sean amarillas?

$$P(Naranja\ y\ dos\ amarillas) = P(AAN) + P(ANA) + P(NAA)$$

$$= \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{6}{720} + \frac{6}{720} + \frac{6}{720} = \frac{18}{720}$$

Notas de clase R. Urbán

- Si se eligen 3 semillas ¿cuál es la probabilidad de que una sea naranja?

$$P(una\ naranja\ y\ dos\ mas) = P\left(N\overline{N}\overline{N}\right) + P\left(\overline{N}N\overline{N}\right) + P\left(\overline{N}\overline{N}N\right)$$
$$= \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{9}\right)\left(\frac{8}{8}\right) + \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{8}{8}\right) + \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

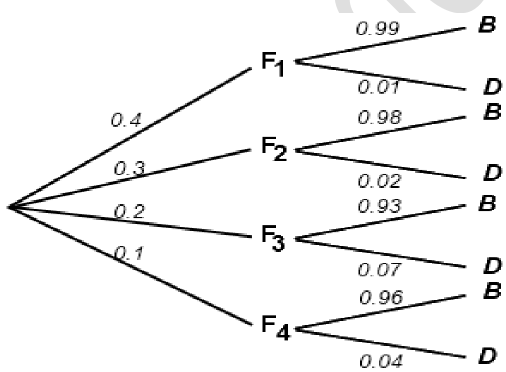
### *9.12.14 Teorema de la probabilidad total*

Sea $S_n = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ un espacio de eventos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea $B$ un evento cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$, entonces la probabilidad del evento $B$ se obtiene así;

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \dots \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

***Ejemplo.*** Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro fábricas: *$F_1$, $F_2$, $F_3$ y $F_4$*. El porcentaje de producción total que se fabrica en cada fábrica es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre defectuosamente envasado?

Sea el evento *D* = "el producto está defectuosamente envasado". Este producto puede proceder de cada una de las cuatro factorías y, por tanto, según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:




$$P(F_1)P(D|F_1) = (0.4)(0.01) = 0.004$$

$$P(F_2)P(D|F_2) = (0.3)(0.02) = 0.006$$

$$P(F_3)P(D|F_3) = (0.2)(0.07) = 0.014$$

$$P(F_4)P(D|F_4) = (0.1)(0.04) = 0.004$$

$$P(D) = P(F_1)P(D|F_1) + P(F_2)P(D|F_2) + P(F_3)P(D|F_3) + P(F_4)P(D|F_4)$$
$$= 0.004 + 0.006 + 0.014 + 0.004 = 0.028$$

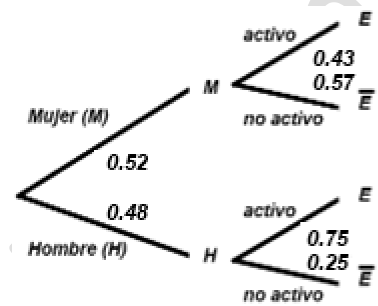
de clase R. Urbán

***Ejemplo***. La población económicamente activa mexicana en el año 2021[20] se muestra en el siguiente cuadro,

| Población en edad laboral | Total | Población Económicamente activa (PEA) | Población económicamente no activa (PNEA) |
|---|---|---|---|
| Total | 98,579 | 57,524 | 41,055 |
| Hombres | 46,692 | 35,099 | 11,593 |
| Mujeres | 51,887 | 22,425 | 29,462 |

Si elegimos una persona al azar en edad laboral, ¿cuál es la probabilidad de no sea económicamente activa?

*Solución:* Iniciamos con el diagrama de árbol




Si llamamos $H = \{hombre\}$ y

$M = \{mujer\ en\ edad\ laboral\}$.

$E = \{Economicamente\ activa\}$

La probabilidad de $P(M) = 0.52$ y que $P(H) = 0.48$.

Además, se conocen las probabilidades condicionadas siguientes:

$$P(\bar{E} \mid M) = \frac{29{,}462}{51{,}887} \cong 0.57\ y \quad P(\bar{E} \mid H) = \frac{11{,}593}{46{,}692} \cong 0.25$$

Analizando con detenimiento el diagrama podemos concluir que:

$$\begin{aligned} P(no\ activa) &= P(M)P(no\ activa/M) + P(H)P(no\ activa/H) \\ &= 0.52\ (0.57) + 0.48\ (0.25) \cong 0.416 \end{aligned}$$

A esta probabilidad $P(A)$, también se le conoce como probabilidad marginal que resulta de la suma de las probabilidades conjuntas, como se definió antes,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

***Ejemplo.*** Un sindicato negocia para sus miembros despesas con productos de primera necesidad. De acuerdo con sus necesidades, cada persona puede elegir entre tres despensas A, B y C con productos diferentes. El sindicato pretende negociar una despensa adicional D, de productos para el aseo personal (cepillos de dientes, jabones, etc.), por la que las personas tendrían que pagar. Para conocer los intereses de sus agremiados levantan una encuesta con los siguientes resultados; 56% de los encuestados se

[20] INEGI, ESTADISTICAS HISTORICAS DE MEXICO, septiembre 2021. Población de 15 y más años por sexo según condición de actividad.

interesan por la despensa A, $40\%$ por la B. $65\%$ de los que eligen la despensa A también les interesa la despensa D. $60\%$ de los que eligen la despensa B también se interesan por la D. Se elige una persona al azar.

a) Calcular la probabilidad de elegir una despensa A y esté interesado también en la despensa D.
b) El sindicato negociará la despensa D si el 55% de los agremiados están interesados.
c) Si el 63% de los agremiados están interesados en la despensa D, ¿cuál es la probabilidad de que si elige la despensa C también elija D?.

El primer paso es construir un árbol.

### *8.12.15 Teorema de Bayes*[21]

El teorema de Bayes es una consecuencia inmediata de la probabilidad condicional y la probabilidad total. La probabilidad condicional, busca calcular la probabilidad de que un evento A ocurra dado que otro evento $B$ ha ocurrido. Se piensa, en general, que $A$ es un evento final; de alguna manera un efecto, para lo cual $B$ es una causa posible y que ambos se encuentran ordenados en el tiempo. Por ejemplo, si pensamos que el evento $A$ es "un agente de ventas tenga 15 ventas" y el evento $B$ "visite 40 posibles clientes" claramente estos eventos están ordenados en el tiempo $A$ es un posible efecto de $B$. Si cambiamos un poco nuestro experimento y decimos que el agente vendió 15 artículos y no sabemos cuántos hogares visitó la pregunta sería ¿cuál es la probabilidad de que haya visitado 40 hogares?

En otras palabras ¿Cómo se puede encontrar la probabilidad de que un evento $B$ haya sido la causa de un evento final $A$ qué se sabe qué ocurrió? Tales probabilidades las proporciona el teorema de Bayes.

Sea $\mathrm{B}$ un evento y $\overline{\mathrm{B}}$ su complemento. Si otro evento $\mathrm{A}$ ocurre entonces,

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P\left(A|\overline{B}\right)P(\overline{B})}}$$

[21] Thomas Bayes, 1702-1762, nació en Londres Inglaterra. Miembro de la Royal Society. En 1763 se publica su obra póstuma, ***Essay Towards Solving a Problem in the Doctrina of Chances,*** que es la base de la teoría Bayesiana.



Notas de clase R. Urbán

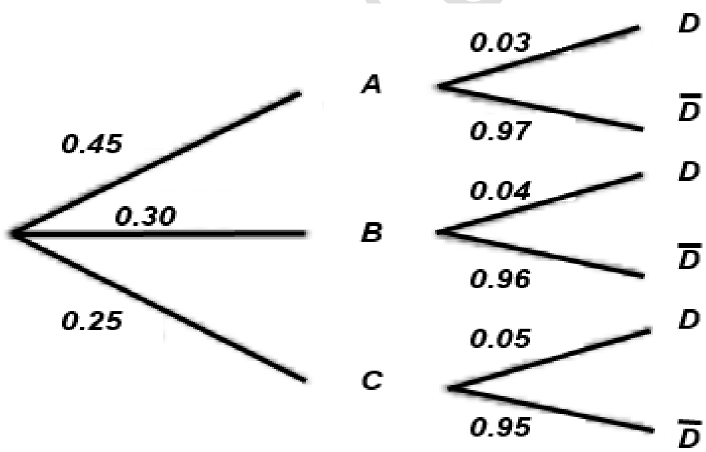
La probabilidad $P(B|A)$ es llamada probabilidad ***a-posteriori*** del evento $B$ dado la información contenida en el evento $A$. Las probabilidades incondicionales $P(B)$ $y$ $P(\overline{B})$ son referidas como las probabilidades ***a-priori*** de los eventos $B$ $y$ $\overline{B}$. En cierta manera la ley de Bayes revisa o actualiza la prioridad *a-priori* $P(B)$. Incorpora en el modelo el hecho de que $A$ ocurrió.

***Ejemplo.*** Una empresa que fabrica teléfonos celulares dispone de tres máquinas, $A, B$ $y$ $C$, que producen el $45\%, 30\%$ $y$ $25\%$, respectivamente, del total de teléfonos producidos por cada máquina. Los porcentajes de celulares defectuosos producidos de estas máquinas son de $3\%, 4\%$ $y$ $5\%$ respectivamente.

a. Si se selecciona un celular al azar; calcular la probabilidad de que sea defectuoso.
b. Tomamos al azar un teléfono y es defectuoso, calcular la probabilidad de haber sido producida por la máquina B.
c. ¿qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido el celular defectuoso?

*Solución*. Sea el evento D = El teléfono es defectuoso.

*Gráfica 9.xx Diagrama de árbol para tres máquinas A, B y C*




a. Para calcular el celular defectuoso $P(D)$, por la propiedad de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) =$$
$$= 0.45(.03) + 0.30(.04) + .25(.05) = 0.038$$

b. Debemos calcular $P(B|D)$, por el teorema de Bayes.

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D|B)P(B) + P(D|A)P(A) + P(D|C)P(C)}$$
$$= \frac{0.04(0.30)}{0.04(0.30) + 0.03(0.45) + 0.05(0.25)} = 0.316$$

c. Calculamos $P(A|D)$ $P(C|D)$ y comparamos estas con el valor anterior de $P(B|D)$

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|B)P(B) + P(D|A)P(A) + P(D|C)P(C)}$$
$$= \frac{0.03(0.45)}{0.04(0.30) + 0.03(0.45) + 0.05(0.25)} = 0.355$$
$$P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D|B)P(B) + P(D|A)P(A) + P(D|C)P(C)}$$
$$= \frac{0.05(0.25)}{0.04(0.30) + 0.03(0.45) + 0.05(0.25)} = 0.329$$

La máquina A tiene la mayor probabilidad de haber producido un celular defectuoso

***Ejemplos.***

A. Se tiene una urna A con 3 pelotas rojas y 5 negras. Otra urna B con 2 rojas y una negra y una última C con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola es roja ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna A?

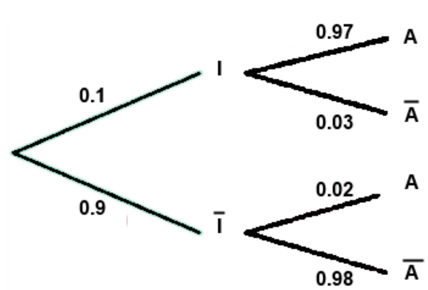
   Sean R el evento obtener bola roja y N obtener bola negra.

   La probabilidad que nos piden es $P(A|R)$ utilizamos teorema de Bayes.

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) + P(R|C)P(C)} = \frac{\frac{3}{8} * \frac{1}{3}}{\frac{3}{8} * \frac{1}{3} + \frac{2}{3} * \frac{1}{3} + \frac{2}{5} * \frac{1}{3}} = \frac{45}{173}$$
$$= 0.26$$

B. La probabilidad de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es 0.1. La probabilidad de que la alarma suene, si se ha producido algún incidente es de 0.97 y la probabilidad de que suene, si no ha sucedido ningún incidente es 0.02. Supongamos que la alarma se activó, ¿cuál es la probabilidad de que no exista ningún incidente?

   Sean los eventos,






Notas de clase R. Urbán

I= producir un incidente y A sonar la alarma

$$P(\bar{I} \mid A) = \frac{0.9\ (0.02)}{0.9(0.02) + 0.1\ (0.97)} = 0.157$$

C. El ingreso de un empleado se afecta por factores como la inflación, incremento anual y la tasa de desempleo del próximo año. Si llamamos $A$ al evento "aumento en el ingreso del trabajador" y $B$ "aumento en la tasa de desempleo", la probabilidad de que aumente el ingreso el próximo año es 0.6 y que la tasa de desempleo aumente es 0.15 y la probabilidad de que la tasa de desempleo se incremente dado que el que el ingreso personal no se incrementa es de 0.25. Encontrar la probabilidad de que,

a) Aumente el desempleo si aumenta el ingreso del trabajador $P(B|A)$
b) Aumento en el ingreso si aumenta el desempleo $P(A|B)$
c) Aumento en el ingreso o aumento en la tasa de desempleo $P(A \cup B)$
d) $P\{(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\}$

*Solución,* nos apoyamos en el siguiente cuadro.

Las probabilidades conocidas son, $P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.15\ y \quad P(B|\bar{A}) = 0.25$

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | $P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$ $= 0.15 - 0.1 = 0.05$ | $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ $= 0.15 - 0.05 = 0.1$ | $P(B) = \mathbf{0.15}$ |
| $\bar{B}$ | $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ $= 0.6 - .05 = 0.55$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$ $= 1 - 0.7 = 0.3$ | $P(\bar{B}) = 1 - 0.15$ $= 0.85$ |
| | $P(A) = \mathbf{0.6}$ | $P(\bar{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$ | |

Si la probabilidad de

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})}, despejamos \quad P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B)$$

Así

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = .25(0.4) = .1$$

Colocamos en la celda correspondiente y completamos el cuadro, así,

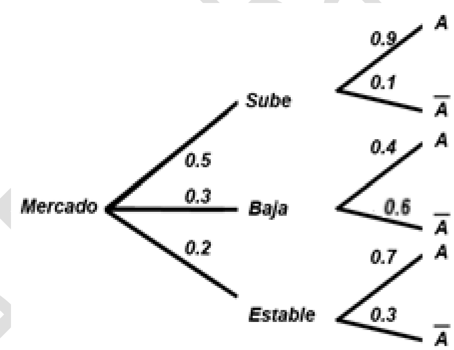
a) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.6} = \frac{1}{12}$
b) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.05}{0.15} = \frac{1}{3}$
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.15 - 0.05 = \frac{7}{10}$
d) $P\{(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\} = 0.55 + 0.1 = 0.65$

Notas de clase R. Urbán

D. Un inversionista está interesado en un paquete de acciones de la empresa “Casa de Bolsa”. El inversionista siente que, si el mercado accionario aumenta el próximo año, la probabilidad de que las acciones de la empresa aumenten es 0.9. Si el mercado baja, la probabilidad de que las acciones aumenten es de 0.4. Finalmente, si el mercado permanece estable, la probabilidad de que las acciones aumenten es de 0.7. Además, el inversionista piensa que el mercado accionario subirá, bajará o será estable con probabilidades de 0.5, 0.3 y 0.2 respectivamente. Finalmente, al final del año, las acciones de la empresa no aumentaron. ¿Cuál es la probabilidad de que el mercado accionario en su conjunto subió?

*Solución.*
Sean los eventos;

A, las acciones de la empresa “Casa de Bolsa” aumentan
S, el mercado accionario sube,
B el mercado baja y
E, permanece estable.




La probabilidad de que el mercado accionario subió es,

$$P(S|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|S)P(S)}{P(\bar{A}|S)P(S) + P(\bar{A}|E)P(E) + P(\bar{A}|B)P(B)}$$

$$P(S|\bar{A}) = \frac{0.1\ (.5)}{(0.1)(0.5) + (0.6)(0.3) + (0.3)(0.2)} = \frac{0.05}{0.29} = \frac{5}{29}$$

E. La cámara de diputados de una legislatura tiene el siguiente nivel de escolaridad. El 40% ha completado el nivel de instrucción primario, el 50 % el nivel de instrucción secundario y el 10% la universidad. Entre los diputados que tienen educación primaria hay una 10 % de izquierda, entre los que tienen educación secundaria un 5 % y entre los graduados universitarios un 2 %. ¿Cuál es la probabilidad de que un diputado elegido al azar sea de izquierda?

Si definimos los eventos; B: diputado de izquierda
A1: nivel de instrucción primario completo.
A2: nivel de instrucción secundario completo.
A3: nivel de instrucción universitario completo.

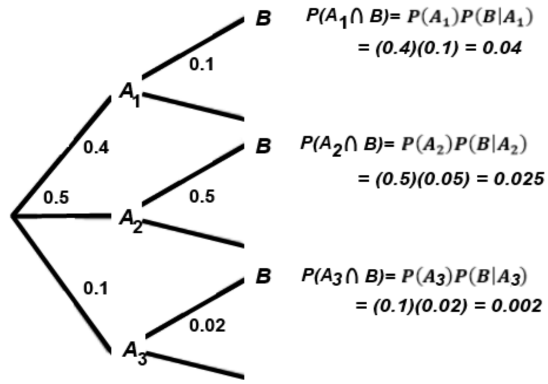
Y sus probabilidades:

$P(A1) = 0.40$ $P(A2) = 0.50$ $P(A3) = 0.10$

Notas de clase

$P(B|A1) = 0.10 \quad P(B|A2) = 0.05 \quad P(B|A3) = 0.02$

Podemos apoyarnos en un gráfico de árbol como el siguiente,




$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$
$$= (0.4)(0.1) + (0.5)(0.05) + (0.1(0.02)$$
$$= 0.067$$

Con lo que concluimos que el 6.7% de los diputados son de izquierda.

En resumen, la teoría bayesiana es útil para determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento cuando el evento que le antecede ya ocurrió. Su utilidad es basta y se puede utilizar para toma de decisiones en una gran variedad de campos, aunque su uso no siempre es obvio.

En algunas aplicaciones, como en el caso de las acciones en bolsa, la asignación exacta de probabilidad es difícil de obtener; finalmente, como dice George Box[22], *"en esencia, todos los modelos están equivocados, pero algunos son útiles"*

***Ejercicios.***

1. *Se toman 5 cartas sin remplazo de una baraja de 52 cartas. Determine la probabilidad de obtener los siguientes eventos.*
   *1.1.* Cuatro cartas iguales (Póker).
   *1.2. Póker de ases*
   *1.3.* Tres cartas iguales
   *1.4.* Tres cartas iguales (tercia), más otras dos iguales (par).
   *1.5.* Cinco cartas consecutivas del mismo palo.
2. *Sean* $A$ *y* $B$ *dos eventos dependientes. Si* $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.31$ *y* $P(A \cup B) = 0.38$. *¿Cuál es la probabilidad de que,*
   *2.1. Sucedan A y B*
   *2.2. No ocurran ni A ni B*

---

[22] 1919-2013. E estadístico inglés, que trabajo entre otras cosas diseño de experimentos e inferencia bayesiana. es considerado como una de las mentes más brillantes de la estadística del siglo *XX*. Fue autor, junto con George C. Tiao, de uno de los mejores libros de estadística, "*Bayesian Inference in Statistical Analysis*". Fuente https://es.wikipedia.org/wiki/George_Edward_Pelham_Box.

Notas de clase R. Urbán

2.3. Ocurra A si B no ha pasado
2.4. Ocurra B si A no ha ocurrido

3. Una maquina consiste en cuatro componentes. Para que no trabaje, deben dejar de funcionar los cuatro componentes. Si la falla de cada componente es independiente y estos tienen probabilidades de 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4 de que fallen cuando se enciende la máquina. ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione al encenderse?
4. Una empresa produce chocolates. El 30% de los chocolates tienen relleno de cereza y el 6% además de cereza tienen nuez. Una persona alérgica a la nuez toma un chocolate al azar. Si el chocolate esta relleno de cereza ¿cuál es la probabilidad de que tenga nuez?
5. Una empresa departamental desea conocer si la forma de pago de sus clientes está relacionada con el departamento donde realiza la compra. Se toma una muestra de 180 compradores y se obtienen los siguientes resultados. En el departamento de electrónica 28 personas pagan en efectivo y 62 utilizan tarjeta de crédito. En el departamento de artículos para el hogar, 16 personas compran de contado y 74 clientes con tarjeta de crédito.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona pague con tarjeta de crédito?
   b) Los eventos 'pagar con tarjeta de crédito' y pagar en efectivo' ¿son eventos independientes? ¿son eventos mutuamente excluyentes
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya hecho su compra en el departamento de electrónica?
6. Una empresa constructora concursa en dos proyectos del gobierno A y B. Ellos piensan que tienen el 54% de posibilidades de ganar el contrato A y 20% de ganar el contrato B. Si gana el contrato A, creen que tienen el 70 % de posibilidades de ganar el contrato B.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa gane los dos contratos?
   b) Si gana el contrato A ¿cuál es la probabilidad de que no gane el contrato B?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa gane uno de los dos contratos?
7. Una institución bancaria quiere mejorar su programa de tarjetas de crédito, para lo cual piensan enviar un recordatorio de pago a clientes con crédito vencido. Por el historial de sus operaciones crediticias saben que, alrededor del 5% de sus clientes con tarjeta de crédito son insolventes y la institución es incapaz de recobrar estos créditos. Por lo tanto, la probabilidad de que un cliente con tarjeta de crédito no pague su crédito es de 0.05. Además, el banco estima que un cliente solvente no realice uno o más pagos mensuales es de 0.20. Por supuesto, la probabilidad de olvidar uno o más pagos mensuales de los clientes insolventes es 1.
   a) Si un cliente olvidó de hacer su pago mensual, cual es la probabilidad de que sea insolvente.
   b) El banco podría reanudar el crédito a los clientes insolventes, si la probabilidad de que haya olvidado su pago mensual es mayor a 0.20. ¿Deberá el banco reanudar el crédito a un cliente insolvente si olvida un pago mensual? ¿Por qué?
8. El departamento de mercadotecnia de una distribuidora de automóviles realiza una encuesta sobre las posibilidades de que una familia posea dos automóviles. De acuerdo con el análisis de la encuesta, la probabilidad de que una familia posea dos automóviles es de 0.65, si su ingreso es mayor a $38,000 pesos. De las familias entrevistadas, el 60% tenía ingresos mayores a $38,000 pesos y el 48% posee dos

Notas de clase R. Urbán

*autos. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga 2 autos y su ingreso sea superior a \$38,000 pesos?*

***Resumen de formulas***

Notas de clase R. Urbán

*Anexo 1*

*Sugerencias para la resolución de problemas*

En su ya clásico libro How to Solve it, George Polya, nos presenta una serie de lineamientos para resolver problemas matemáticos. Este libro fue publicado en 1945 (traducido al español en 1969 con el título Cómo Plantear y Resolver Problemas).

Pólya nos presenta un patrón general para la resolución de problemas, el cual consiste en 4 pasos.

**Primero. Comprender el problema**. Esto es más fácil decirlo que hacerlo.

- ¿Qué se busca en el problema?
- Asegúrate que conoces el significado de todas las palabras. Usa tus apuntes, libro de texto u otro libro tanto del curso como de otros cursos.
- Lee bien el enunciado para comprender qué es lo que se da y qué es lo que se tiene que encontrar o resolver.
- Trata de hacer una figura o diagrama que te ayude a entender el problema.
- ¿Se tiene que probar algo? ¿Qué es lo que se tiene que probar?
- ¿Se trata de encontrar un ejemplo? ¿De qué?
- Verifica las condiciones.
- ¿Se tiene que probar que algo es falso?
- Escribe al problema de diversas maneras.
- Una vez que entiendes el problema pasa al siguiente paso.

**Segundo. Trazar un plan.** ¿Cómo atacas el problema?

- Intenta utilizar una experiencia anterior para encontrar un método de solución.
- ¿Conoces un problema similar o relacionado?
- Repasa tus notas de clase y tu libro con el problema en mente.
- Repasa ejercicios previos y teoremas que parezcan similares. ¿Puedes usar ideas de las demostraciones de estos resultados para resolver tu problema?
- Trata de usar un argumento por analogía.
- Piensa hacia atrás a partir de la conclusión deseada.
- ¿Estás usando todas las hipótesis?
- Si estás atorado intenta resolver un problema más simple o un caso especial.
- Una vez que hayas decidido un método, pruébalo.

**Tercero. Llevar a cabo el plan.** Resuelve el problema.

- Mira bien tu solución.
- ¿Tiene sentido tu solución?
- ¿Cada paso es correcto?

Notas de clase R. Urbán

- Es común que no se encuentre un error justo después de que se ha encontrado una
- solución. Deja el problema un tiempo y regresa a él después.
- ¿Te parece todavía razonable tu solución?
- ¿Crees todavía que todos tus pasos y afirmaciones son correctas?
- ¿Puedes probar lo anterior?
- Retroaliméntate con los pasos anteriores.

**Cuarto. Examinar la solución obtenida.**

- Verifica el resultado y tus argumentos.
- ¿Puedes obtener el resultado de forma diferente?
- ¿Existe un argumento más simple o intuitivo?
- ¿Te parece que la solución tenía una explicación obvia?
- ¿Puedes usar esta solución o método para resolver otro problema o generalizar la solución?

Cuando estés convencido que tu argumento es correcto, escribe la solución de forma correcta y clara.

***Sugerencias para resolver problemas generales***

Las siguientes sugerencias pueden aplicarse para resolver cualquier problema, sea cual sea su área de conocimiento o grado de complejidad. Están clasificadas de acuerdo con los siguientes tres principios básicos:

**Principios heurísticos**

a) Intenta primero lo sencillo
b) Aprende de los intentos fallidos
c) Ninguna idea es realmente mala

**Principios de creatividad**

d) No te impongas restricciones inexistentes
e) Trata de verlo desde otro punto de vista
f) Pon en práctica tu intuición

**Principios para la solución de un problema.**

g) Atrévete a enfrentar al problema
h) Defínelo y entiéndelo bien
i) Investígalo

Notas de clase R. Urbán

*ANEXO 2*

***Axiomas de ZERMELO-FREANKEL***

Como vimos antes, definir qué es un conjunto no es una tarea fácil. En forma intuitiva definimos teoría de conjuntos como una colección de objetos. Asimismo, asignamos elementos a un conjunto también de manera intuitiva. Ya antes Russel y el mismo Cantor en su correspondencia con Dedekind, se dieron cuenta de la no existencia del conjunto universal, y las paradojas que puede resultar de un conjunto bien definido, esto daría pie a los siguientes axiomas cuya finalidad es darle consistencia y coherencia lógico-formal.

**Axioma 1 (de Existencia)** Hay un conjunto que no tiene elementos.

**Axioma 2 (de Extensión)** Si todo elemento de $X$ es un elemento de $Y$, y todo elemento de $Y$ es un elemento de $X$, entonces $X = Y$.

**Axioma 3 (Esquema de Comprensión)** Sea $P$ una fórmula. Para cualquier conjunto $A$ hay un conjunto $B$ tal que $x \in B$ si y sólo si $x \in A$ y $x$ satisface la fórmula $P$.

**Axioma 4 (del Par)** Para cualesquiera conjuntos $A$ y $B$ hay un conjunto $C$ tal que $x \in C$ si y sólo si $x = A$ o $x = B$.

**Axioma 5 (de Unión)** Para cualquier conjunto $S$, existe un conjunto $U$ tal que $x \in U$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in S$.

**Axioma 6 (del Conjunto Potencia)** Para cualquier conjunto X, existe un conjunto S tal que A ∈ S si y sólo si A ⊆ X.

**Axioma 7 (de Fundación)** En cada conjunto no vacío A existe u ∈ A tal que u y A son ajenos.

**Axioma 8 (de Infinitud)** Existe un conjunto $X$ tal que $\emptyset \in X$ tal que si $Y \in X$, entonces $Y \cup \{y\} \in X$

**Axioma 9 (Esquema de Reemplazo)** Sea $P(x, y)$ una formula tal que para todo $x$ existe un único $y$ para el cual $P(x, y)$ se satisface. Así, para todo conjunto $A$ existe un conjunto $B$, tal que y ∈ B si y solo si existe x ∈ A tal que $P(x, y)$

**Axioma 10 (de Elección)** Todo conjunto no vacío tiene una función de elección.

Notas de clase R. Urbán

*Anexo 3 los naturales*

Para construir el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales partimos de ciertas reglas que nos garantizan consistencia lógica, dichas reglas son conocidas como los axiomas de Peano.

**Axiomas de Peano**

1. 0 es un numero natural
2. Si $n$ es un número natural, existe un único numero natural $\sigma(n)$ que es el sucesor de $n$.
3. Para todo número natural $n, \sigma(n) \neq 0$
4. Para todos los números naturales $n\ y\ m,\ si\ \sigma(n) = \sigma(m)\ entonces\ n = m$
5. Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $0 \in S\ y\ \sigma\,(n) \in S\, para\, cada\, n \in S, entonces\ \ S = \mathbb{N}$.

**Factorización**

Las formas más usadas para factorizar una expresión aritmética son las siguientes.

1) Obtener el factor común en un polinomio. Consiste en aplicar la propiedad distributiva

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a(b + c + d)$$

**Ejemplos,** descomponer en factores sacando factor común y hallar las raíces de un polinomio,

a) $x^3 + x^2$
   Obtenemos el factor común y rescribimos la ecuación como $x^2(x + 1)$.
   Las raíces son los valores de $x$ que hacen cero la ecuación; $x = 0\ y\ x = -1$
b) $2x^4 + 4x^2$
   En este caso el factor común es $2x^2$ y la ecuación queda $(x^2 + 2)$
   Sólo tiene una raíz doble $x = 0$; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que al estar la $x$ al cuadrado siempre dará un número positivo; por lo tanto, es irreducible.
c) $x^2 - ax - bx + ab$
d) Como en los casos anteriores obtenemos factores comunes y nos queda la ecuación $x(x - a) - b(x - a) = (x - a) \cdot (x - b)$
   Para esta {ultima ecuación las raíces son $x = a\ y\ x = b$

2) Diferencia de cuadrados. Una diferencia de cuadrados es igual a suma por diferencia.

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

**Ejemplos**, Descomponer en factores y hallar las raíces



Notas de clase R. Urbán

a) $x^2 - 4$
Descomponemos en factores $x^2 - 4 = (x+2) \cdot (x-2)$. Las raíces son entonces, $x = -2$ y $x = 2$

a) $x^4 - 16$
De la misma manera, descomponemos obtenemos los factores y rescribimos la ecuación, $x^4 - 16 = (x^2+4)(x^2-4)$. Finalmente, las raíces son, $x = 2$ y $x = -2$.

3) Trinomio cuadrado perfecto. Un trinomio cuadrado perfecto es igual a un binomio al cuadrado.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

**Productos notables**

Se llama producto notable al que puede ser obtenido sin efectuar la multiplicación término a término. Los más importantes son los siguientes

**1) Binomio de suma al cuadrado**
Un binomio al cuadrado (suma) es igual es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado segundo.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Por ejemplo, $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

**2) Binomio de resta al cuadrado**
Un binomio al cuadrado (resta) es igual es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado segundo.

$$(a-b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Ejemplo, $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

**3) Suma por diferencia**
Una **suma por diferencia** es igual a **diferencia de cuadrados**.

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo, $(2x+5) \cdot (2x-5) = (2\,x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

Notas de clase R. Urbán

**Binomio al cubo**

1) **Binomio de suma al cubo**
   Un **binomio al cubo** (suma) es igual al cubo del primero, **más** el triple del cuadrado del primero por el segundo, **más** el triple del primero por el cuadrado del segundo, **más** el cubo del segundo.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

   Ejemplo, $(x+3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

2) **Binomio de resta al cubo**
   Un **binomio al cubo** (resta) es igual al cubo del primero, **menos** el triple del cuadrado del primero por el segundo, **más** el triple del primero por el cuadrado del segundo, **menos** el cubo del segundo.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

   Ejemplo, $(2x-3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 33 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

**Trinomio al cuadrado**

Un **trinomio al cuadrado** es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el cuadrado del tercero, más el doble del primero por el segundo, más el doble del primero por el tercero, más el doble del segundo por el tercero.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

Ejemplo, $(x^2 - x + 1)^2 = (x^2)^2 + (-x)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-x) + 2x^2 \cdot 1 + 2 \cdot (-x) \cdot 1$
$= x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

**Suma de cubos**

La suma de cubos es igual al producto de dos factores. Primero se obtiene la suma de las raíces cúbicas de los dos términos; después, se multiplica por el polinomio que resulta del cuadrado de la raíz cúbica del primero, menos el producto de las raíces cúbicas, más el cuadrado de la raíz cúbica del segundo.

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo, $8x^3 + 27 = 8x^3 + 3^3 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

Notas de clase R. Urbán

**Diferencia de cubos**

La diferencia de cubos se efectúa similar a la suma con signos. Se extrae la raíz cúbica de cada termino, se forma el producto de dos factores; el primero es la diferencia de los términos. El segundo factor es el polinomio que resulta del cuadrado de la primera raíz más el producto de las raíces de los términos más el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo, $8x^3 - 27 = 8x^3 - 3^3 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

**Producto de dos binomios que tienen un término común**

El producto de dos binomios del tipo es igual al cuadrado del primer término, más el producto de la suma de los dos segundos

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ejemplo, $(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$

**Cocientes notables**

1) $\frac{a^2-b^2}{a+b} = a - b$
2) $\frac{a^2-b^2}{a-b} = a + b$
3) $\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$
4) $\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2$

***Bibliografía.***

Alpha C. Chiang ***Métodos Fundamentales de Economía Matemática***. Ed. McGraw-Hill, 1987.USA

Notas de clase R. Urbán

Anderson, D. R., D. J. Sweeney y T. A. Williams. (2008). ***Estadística para la administración y la economía.*** (10ª ed). México: CENGAGE Learning. 260-262.
Anton Howard ***INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA LINEAL***, Editorial LIMUSA S.A. de C.V., Grupo Noriega Editores, México 1992.

Apostol T. M ***CALCULUS, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al algebra lineal***. Editorial Reverté Ediciones, Volumen I, México, 1999.

Arya Jagdish C., Lardner Robin W., ***MATEMÁTICAS APLICADAS a la administración y a la economía.*** Quinta edición Prentice hall, México 1993.

Barnett, R. A., Ziegler, M. R., Byleen, K. E., **COLLEGE ALGEBRA**, seventh edition, McGraw-Hill, New York USA, 2001

Buchaman, L. , *Limites (una transición al cálculo*, Editorial EASO, México, 1985

Budnick Frank S, MATEMÁTICAS APLICADAS PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA Y CIENCIAS SOCIALES, McGraw-Hill, S.A. de C.V, México, 2004.
Dodge, Clayton W. ***Sets, logic and Numbers.*** Prindle, Weber & Schmit, incorporated. Boston 1969.

Draper Jean E. y Klingman Jane S. **Matemáticas para Administración y Economía.** Editorial Harla, México, 1976.

Garza Tomás, ***Elementos de cálculo de probabilidades***. UNAM, México, 1983

Goldstein, L. J, Lay D. C., Schneider, D. I. ***CALCULUS AND ITS APPLICATIONS,*** Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey USA, 1993.

Haeussler, Jr E.F., Richard S. Paul, Wood Richard J., ***Matemáticas para administración y economía.***, Pearson, México, 2008.

Hairer, E., Warner, G. Analysis by its history. Springer, New York 2008.

Hammond P.J. y Sydsaeter Knut. ***Matemáticas para el Análisis Económico***. ED. Prentice Hall, 1998. México.

Hillier, F.S. y Liebermann, G.J. **Introducción a la Investigación de Operaciones.** Ed. McGraw-Hill. 2001.

Hernandez H, Fernando. ***Teoría de conjuntos (una introducción)***. Sociedad Mexicana de Matemáticas, México 2009.

Notas de clase R. Urbán

INEI, ***GUIA PARA LA PRESENTACION DE GRAFICOS ESTADÍSTICOS.*** Instituto Nacional de Estadística e Informática, Centro de Investigación y Desarrollo, Lima Perú, agosto 2009

Keller Gerard, Warrack Brian, ***STATISTICS for management and economics.*** Duxbury Press, USA, 1997.

Larson R.E., Hostetler R. P. y Edwards B. H. ***CÁLCULO Y GEOMETRIA ANALÍTICA***. Sexta edición, Editorial Mc Graw Hill, Madrid

Levine I. Richard, ***Estadística para administradores, Prentice-Hall-Hispanoamericana, S.A.*** México 1987

Levine, D. M., T. C. Krehbiel y M. L. Berenson. (2006). ***Estadística para la administración.*** (4ta ed). México: Pearson Prentice Hall. 221.

Lind, D. A., W. G. Marchal, y S. A. Wathen. (2008). ***Estadística aplicada a los negocios y a la economía.*** (13a ed). México: McGraw-Hill. 262, 265, 266

*Mendenhall William, Reinmuth James.* ***ESTADISTICA PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMIA.*** *Grupo editoria Iberoamerica 1978. México*

Pasinetti Luigi, LECCIONES DE TEORIA DE LA PRODUCCIÓN, Fondo de Cultura Económica, México, 1984.

Simonnard M. ***Programation Linéaire.*** Ed Dunond, 1972. Francia.

Bibliografía

Stevenson William J, ***ESTADISTICA PARA ADMINISTRACION Y ECONOMIA***. Conceptos y aplicaciones. OXFORD University Press, 1981, México.

*Webster Allen L.* ***ESTADISTICA APLICADA A LOS NEGOCIOS Y LA ECONOMIA,*** *tercera edición McGraw-Hill 2000. México*

Notas de clase R. Urbán