Capítulo 6.

Cálculo en varias variables.

6.1 Funciones en varias variables.

En el trabajo profesional, se requiere trabajar con modelos económicos que necesariamente consideran más de una variable en forma simultánea y así explicar procesos complejos. Aunque el economista utiliza con bastante frecuencia funciones de dos variables, las funciones de varias variables constituyen un marco de aprendizaje más rico. De hecho, permiten comprender cómo determinadas variables económicas, al afectar a otras en los modelos económicos, inciden en las opciones económicas o en las políticas económicas.

Muchas veces utilizamos las funciones con la idea de buscar puntos extremos. Encontrar estos puntos es más fácil si las funciones son cóncavas o convexas. Esta especificidad es una de las razones del lugar privilegiado que se les otorga en determinadas teorías económicas. Así, los conceptos y técnicas de estudio local de funciones a través de las propiedades específicas de las funciones conducen a una mejor comprensión de los principios de la economía y, en particular, a la importancia de la optimización, técnica que es clave en economía y estudiaremos más adelante.

Algunos ejemplos de funciones de varias variables económicas.

- Si realizamos una inversión la cantidad de dinero que obtenemos al final del año depende de la cantidad invertida y de la tasa de interés.
- En macroeconomía sabemos que el consumo se considera que es una función del nivel del ingreso y la tasa de interés o que la demanda de saldos monetarios es una función del nivel del producto de la economía, de la tasa de interés y de la tasa de inflación.
- En microeconomía, la demanda de un bien depende de su precio, los precios de los bienes sustitutos y complementarios, del ingreso del consumidor y otros factores.
- Una función de beneficio que expresa la diferencia entre el Ingreso menos los costos, posteriormente en este capítulo analizaremos este tipo de expresiones.

En este capítulo, para ilustrar la metodología, emplearemos principalmente modelos de funciones de dos variables, ya que las podremos reperesentar en una gráfica en tres dimensiones. La generalización a más variables es una consecuencia del análisis.

6.1.1 Función de dos variables.

Una función $f(x,y)$ de dos variables x e y con dominio $D \subset R^2$, es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x,y) perteneciente a un conjunto D un único número real a cada punto $(x,y) \in D$. El conjunto D es el dominio de la función y los valores que toma $g = f(x,y)$ es el rango de la función.

Al igual que en el caso de funciones de una variable, a menos que se diga lo contrario, el dominio de una función definida por una regla o fórmula son los valores de las variables para los cuales la fórmula tiene sentido y da un valor único.

En particular, para las funciones que tratamos en economía, hay restricciones explicitas o implícitas de variación de las variables; por ejemplo, la no negatividad de las variables. Si la función es racional, esta no estará definida cuando el denominador es cero, o en las funciones cuadradas, que tienen raices pares y por consiguiente no será aceptable para valores negativos de la raiz.

Suponga una cooperativa rural que produce café inorgánico y orgánico. El costo de producir un kilo de café inorgánico es de 15 pesos y el orgánico es de 24 pesos. La cooperativa tiene costos fijos mensuales de 4000 pesos.

a) Encuentre el costo mensual de producción de ambos tipos de café.
b) Si la cooperativa coloca en el mercado el café inorgánico en 60 pesos y el orgánico en 75, obtenga la función de utilidad.

Solución

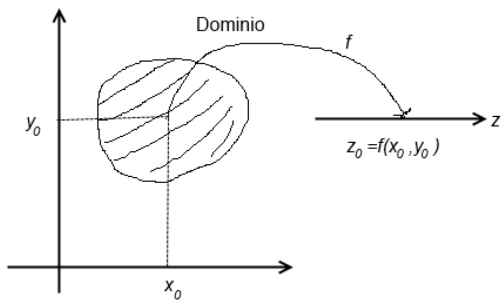
a) El costo de producción de x kilos de inorgánico y y kilos de orgánico es de $15x$ y de $24y$ respectivamente.
$C(x, y) = \; Costo\ fijo \; + \; Costo\ variable$
$C(x, y) = 4000 + (15x + 24y)$

b) Para encontrar la función de utilidad, primero encontramos la función de ingreso total para los dos tipos de café.
$I(x, y) = ventas\ de\ q_1 + ventas\ de\ q_2$
$I(x, y) = 60x + 75y$
Finalmente, la utilidad está dada por la diferencia entre
$g = U(x, y) = Ingresos - costos$
$g = U(x, y) = 60x + 75y - (4000 + 15x + 24y)$
$g = U(x, y) = 45x + 51y - 4000$

Las variables x y y son las variables independientes y la función de utilidad g es la variable dependiente. Como en las funciones de una variable, los valores del dominio de la función son validos para el campo de los números reales. Cuando se trata de funciones de aplicación en economía, el dominio de la función debe tener, además, “sentido económico”.

El dominio en el caso de funciones de varias variables ya no es un solo punto o un valor en el espacio, como en el caso de las funciones simples, tenemos que trabajar en un plano cartesiano.

Gráfica 6.1 Los dominios son ahora figuras planas



$$f: \mathcal{R}x\mathcal{R} \to \mathcal{R}$$

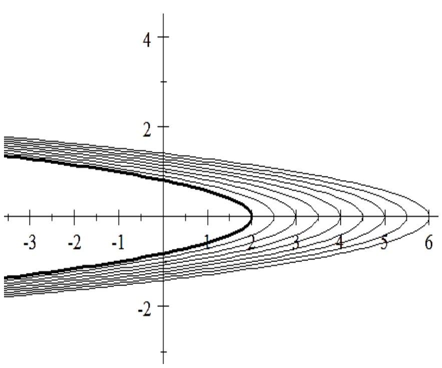
$$(x, y) \overset{f}{\to} z(x, y)$$

Ejemplo: Calcular el dominio de las siguientes funciones y representar en forma gráfica.

a) $f(x, y) = \sqrt{x + 4y^2 - 2}$, Se nos pide calcular el dominio de $f(x, y)$, su representación en un gráfico y calcular cuando $f\left(-1, -\frac{1}{2}\right), f\left(1, \frac{1}{2}\right), f(0,2)$

Solución. Los valores que tendrían sentido son para aquellos que el radicando sea mayor o igual que cero,

Gráfica 6.2



$$x + 4y^2 - 2 \geq 0 \quad \leftrightarrow \; x + 4y^2 \geq 2$$

De esta manera el dominio es el conjunto de los pares (x, y) tales que $x + 4y^2 \geq 2$, es decir,

$$D_{f(x,y)} = \{(x, y) | x + 4y^2 \geq 2$$

Para obtener su gráfica, supondremos en primer lugar la función como una ecuación tal que $x + 4y^2 = 2$ y la rescribimos como $x = 2 - 4y^2$. Trazamos la curva, que es una parábola que abre hacia el lado izquierdo con vértice en $(2,0)$

La región que determina el dominio es el conjunto de puntos que satisface la desigualdad $x + 4y^2 \geq 2$ y todos los puntos que están en las parábolas superiores.

Sustituimos los puntos de interés, $f\left(-1,-\frac{1}{2}\right), f\left(1,\frac{1}{2}\right), f(0,2)$ en la ecuación

$$x+4y^2-2\geq 0$$

El primer punto no satisface la ecuación, ya que, al sustituir sus valores,

$$-1+4\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\geq 0 \ \rightarrow -2\ngeq 0$$

Por lo tanto, no está en el dominio.

El segundo punto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ al sustituir nos queda,

$$1+4\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\geq 0 \ \rightarrow 0\geq 0$$

Si pertenece al dominio.

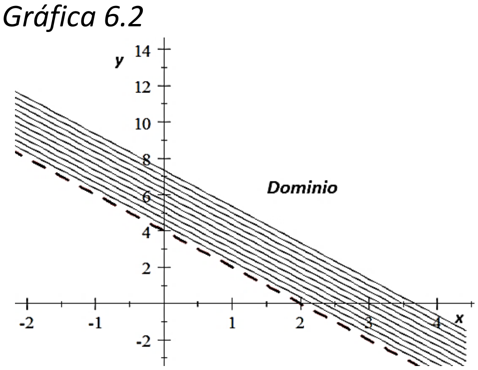
Finalmente, el punto (0,2), $0+4(2)^2-2\geq 0 \ \rightarrow 6\geq 0$, que también está en el dominio.

b) $f(x,y)=ln(6x+3y-12)$ Para que la función esté bien definida y sea un número real se tiene que cumplir que $6x+3y-12>0$, entonces:

$$D_f=\{(x,y)|\ 6x+3y-12>0\}$$

El gráfico de esta función es un plano lineal. Para determinar este plano, graficamos la recta $6x+3y-12=0$. Debemos notar que los puntos sobre esta recta no pertenecen al dominio.

Gráfica 6.2



Los puntos superiores a la línea punteada pertenecen al dominio; por lo contrario, los puntos inferiores no perteneces al dominio.

El origen, (0,0) no satisface la igualdad $6x+3y-12>0$; entonces, el origen no pertenece al dominio, de la misma manera podemos probar cualquier punto.

c) Sea la función $f(x,y)=ln(3xy-9)$ El dominio de esta función será aquel que, cumple con,

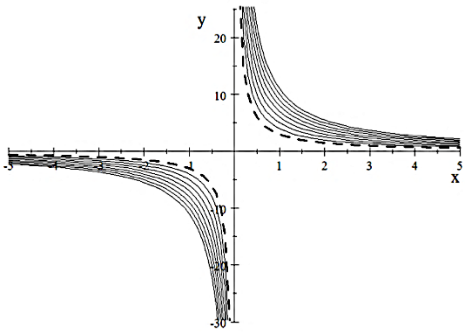
$$3xy-9>0, \qquad es\ decir \quad xy>3$$

El dominio de la función,

$$D_f = \{ (x, y) |\ xy - 3 > 0\}$$

Sabemos que $xy > 3$ $entonces \quad y > \frac{3}{x}$, $como\ x\ no\ puede\ tomar\ valor\ de\ cero$

Gráfica 6.3



El dominio es $xy - 3 > 0$

$$\text{Entonces} \begin{cases} y < \frac{3}{x}, & si\ x < 0 \\ y > \frac{3}{x}, & si\ x > 0 \end{cases}$$

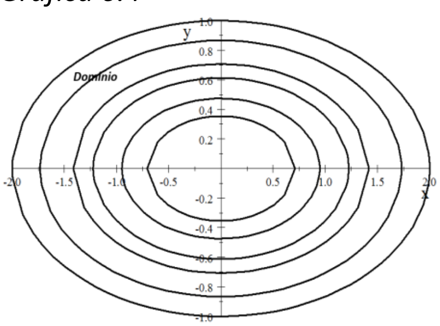
El rango de la función tiende a ∞ cuando los puntos (x, y) son positivos; por lo contrario, cuando son negativos, la función tienda a $-\infty$

d) Encontrar el dominio y el rango de la función, $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$
Nuevamente, la función tomará valores que tienen sentido cuando se cumpla que $4 - x^2 - 4y^2 \geq 0$, entonces:

$$D_f = \{(x, y) |\ 4 - x^2 - 4y^2 \geq 0\}$$

El gráfico de esta función es una elipse. Para determinar este plano, obtenemos la gráfica con la siguiente función modificada $4 \geq x^2 + 4y^2$. Debemos notar que los puntos sobre esta función, si pertenecen al dominio. El dominio son los puntos interiores a la elipse, incluidos los valores que están en la función. Es decir,

Gráfica 6.4



$$D_f = \left\{(x, y) |\ 4 \geq x^2 + 4y^2 \rightarrow\ 4 \geq \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/4} \leq 4\right\}$$

Finalmente obtenemos, al dividir cada elemento de la función entre 4.

$$D_f = \left\{(x, y) |\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \leq 1\right\}$$

Que es la ecuación de una elipse, los ejes miden 2 y 1 unidades respectivamente[1].

[1] Recordemos que la ecuación de una elipse es, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a es la longitud del semieje mayor y b la del semieje menor.

El rango de la función

$$\left\{z|z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2} \leq 2, \quad (x, y) \in D_f\right\}$$

Los valores que la variable z puede tomar son mayores o iguales a cero, el rango es,

$$R_f = \left\{z|0 \leq z \leq 2, \quad (x, y) \in D_f\right\}$$

e) Una organización de productores rurales vende 2 productos artesanales a 25 y 14 pesos respectivamente. Los ingresos por las ventas de estos productos que denotaremos, x e y están dados por la función.

$$f(x, y) = 25x + 14y$$

Determine e interprete los valores que pueden tomar cada una de las variables de interés.

Solución, consideremos una tercera variable, z que son los ingresos por las ventas. De esta manera entonces,

$$z = f(x, y) = 25x + 14y$$

El dominio de esta función es el conjunto de valores de x, y tal que, $x \geq 0$, $y \geq 0$
Si bien, las variables en términos matemáticos pueden tomar valores negativos, estos no tendrían ningún sentido en términos económicos. El rango, o imagen, también solamente toma valores de $z >= 0$.

Ejercicios. *Determine y dibuje la gráfica del dominio de las funciones siguientes. Determine si los siguientes puntos pertenecen al dominio.* $(f(0,2)$, $f(1,-1)$ y $f(1,2)$

a) $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

b) $f(x, y) = ln\ (xy + 5)$

c) $f(x, y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}$

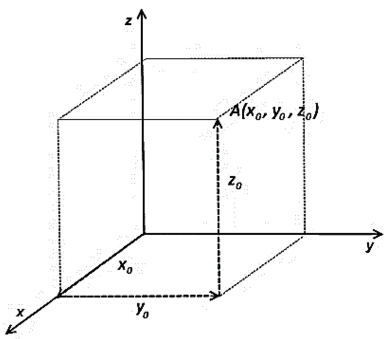
d) $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2-4}$

e) $f(x, y) = \sqrt{(4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1)}$

6.1.2 Gráfica de una función bivariada

Representar gráficamente una función de varias variables solo es posible para funciones de $\mathcal{R}^2\ en\ \mathcal{R}$. La función $f:(x,y) \rightarrow f(x,y)$ se representa en un espacio de tres dimensiones por la ecuación $z = f(x,y)$. Dibujar estas funciones "a mano" no es simple, pero podemos facilitar su trazo para algunos tipos de funciones[2].

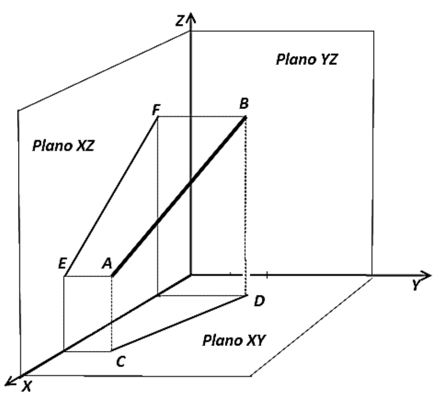
Gráfica 6.5 Función bivariada



Un punto en el espacio tridimensional de $\mathbb{R}^3$, se representa por una terna ordenada de números (x_0, y_0, z_0). Los tres ejes coordenados, determinan los tres planos de coordenadas, XZ para cuando $y = 0$, XY si $z = 0$ y YZ para las ternas que se forman con un valor de $x = 0$.

Estos tres planos se cruzan en el punto $(0,0,0)$ y dividen el espacio de tres dimensiones en ocho partes (2^ndonde n es la dimensión del espacio).

Gráfica 6.6 Recta en un plano tridimensional



Para dibujar una recta en el plano tridimensional, por ejemplo, la recta que une los puntos $A(10,3,5)$ y $B(3{,}6{,}12)$ se ve así en el plano.

Las rectas CD y EF son proyecciones de la recta AB sobre los planos XY y XZ respectivamente. La primera une los puntos $C(10,3,0)$ y D$(3{,}6{,}0)$ y la segunda E$(10{,}0,5)$ y F$(3{,}0{,}12)$.

Curva de nivel

Una manera de visualizar una función de dos variables y de particular interés en la Economía son las llamadas curvas de nivel. Estas se caracterizan porque en el contorno de la curva el valor de $f(x,y)$ es constante. Para trazar una curva de nivel se toma un valor fijo de la variable dependiente y se calculan las diferentes combinaciones de las dos

[2] Existen una gran variedad de programas de computadora que nos permiten obtener gráficos de funciones complejas con una gran calidad, como; MAPLE, MATHCAD, MATHEMATICA, Scientific Workplace, etc.

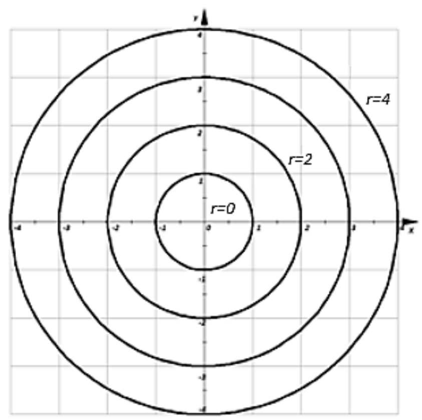
variables independientes que producen el valor fijo de la variable dependiente; es decir se dan cortes horizontales a la gráfica y a partir de estos cortes se construye la gráfica.

Si tenemos la función $z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, para encontrar su representación gráfica por medio de curvas de nivel, podemos separar la función de esta manera

$$x^2 + y^2 = 1 - z$$

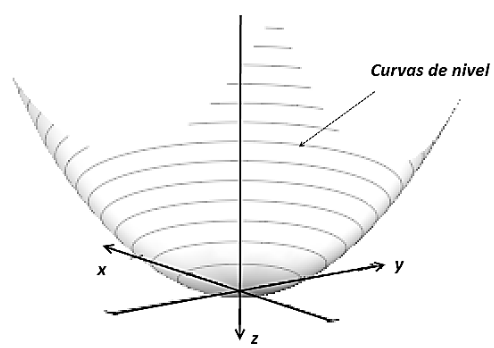
Es la ecuación de una circunferencia[3] en donde z puede tomar cualquier valor comprendido entre $(-\infty, 1]$, no tendría sentido un valor de $z > 1$. De esta manera habría una familia de circunferencias con centro en el origen y radio $r = (1 - z)$. Así,

Gráfica 6.7 curvas de nivel



Radio r	*Curva de nivel*	*tipo de curva*
$r = 0$	$\{(x, y \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 0\}$	*Es el punto* $(0,0)$
$r = 1$	$\{(x, y \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$	*Circunferencia de radio r=1*
$r = 2$	$\{(x, y \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4\}$	*Circunferencia de radio r=2*
$r = 3$	$\{(x, y \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 9\}$	*Circunferencia de radio r=3*
$r = 4$	$\{(x, y \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 16\}$	*Circunferencia de radio r=4*

Gráfica 6.8 Gráfica de curvas de nivel en tres dimensiones



Otra forma de encontrar la gráfica de una función bivariada es la siguiente. Consideremos la siguiente función.

[3] La ecuación general de una circunferencia es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, donde el punto (h, k) es el centro de la circunferencia y r el radio.

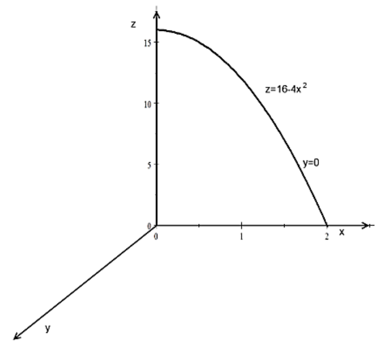
$$f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$$

Para realizar el trazo de esta función, empezamos por fijar el valor de una de las variables, por ejemplo $y = 0$, de esta manera la función que nos queda es,

$$z = f(x, y) = 16 - 4x^2 - 0$$
$$Z = 16 - 4x^2$$

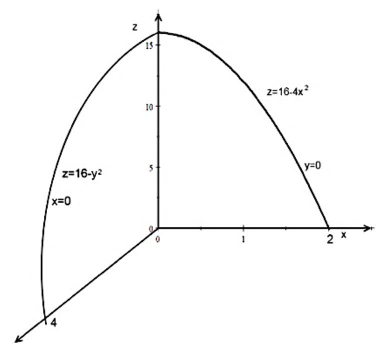
Tenemos una ahora una función de dos variables, que corresponde a la de una parábola que abre hacia abajo construimos para su gráfico la siguiente tabla.

x	$16 - 4x^2$
0	16
.5	15
1	12
1.5	7
2	0

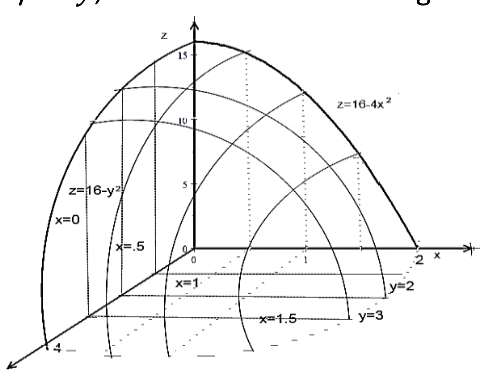


Repetimos ahora con un valor de $x = 0$, la tabla de valores es la siguiente,

y	$16 - y^2$
0	16
1	15
2	12
3	7
4	0



Esta última grafica representa solamente un trazo de la función, podemos repetir trazos para diferentes valores de x y de y, al final tendríamos una gráfica como la siguiente,



Para aplicaciones económicas, las curvas de nivel son de gran utilidad, por las diferentes formas que toma en la Economía.

- Curvas de indiferencia o de preferencia. Se definen cuando la función bajo consideración representa conjuntos de bienes para los que la satisfacción del consumidor es la misma en todos los puntos. Recordemos que la función de utilidad es una forma de representar las preferencias del consumidor.
- Isocuantas. En estas la función en cuestión es la función de producción. Representa diferentes combinaciones de factores, como podrían ser el trabajo y el capital, que proporcionan en cualquier punto de la curva un mismo nivel de producción.
- Curvas de isocoste. Si la función de interés es el costo, esta función nos expresa las diferentes combinaciones de factores de producción, por ejemplo, de capital y de trabajo, que se pueden adquirir con el mismo gasto total. Las líneas de isocostes son rectas, afirmándose con esto que la empresa no tiene control sobre los precios de los insumos, aunque los precios sean iguales, no importa cuántas unidades se compren.

Funciones de producción

Las funciones de producción son un caso muy claro de funciones de varias variables. Sabemos que la función de producción es una relación que asocia la cantidad producida de diferentes elementos, o factores, necesarios para la producción. Se distinguen dos factores de producción, las cantidades empleadas de capital (K) y el trabajo (L). El capital incluye todos los bienes duraderos (herramientas, máquinas, edificios, etc.) utilizado por el productor para producir otros bienes. La función de producción de un bien puede escribirse en forma general $Q = f(K, L)$.

Una función de producción muy usual en Economía es La función de producción llamada Cobb-Douglas[4]. Esta función, con un enfoque neoclásico, relaciona funcionalmente a los insumos de capital y trabajo necesarios para producir de la manera más eficiente posible una determinada cantidad de un bien:

$$Y = F(K, L) = AK^{\propto}L^{\beta}; \quad \propto, \beta > 0; \quad K, L \geq 0, \quad A > 0$$

[4] Es una de las funciones más usadas en la economía por sus propiedades. La función de producción presenta rendimientos constantes a escala. Es decir, si el capital y el trabajo se incrementan en la misma proporción, la producción también aumenta en esa proporción.

K y L representan las cantidades de capital y trabajo respectivamente, α y β son las elasticidades producto del capital y del trabajo y A es un indicador de escala de la productividad total de los factores (progreso tecnológico, exógeno).

Los tres valores son constantes que dependen de la tecnología disponible. L a variable 'Y' es la cantidad máxima del bien que se puede producir dados los insumos utilizados de capital y trabajo. La función es homogenea, lp podemos probar,

$$Y = F(tK, tL) = A(tK)^{\propto}(tL)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}Ak^{\alpha}L^{\beta} = t^{\alpha+\beta}F(K, L)$$

Lo que demuestra que es una función homogénea de grado $\alpha + \beta$. Además, se cumple que cuando,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta = 1 \quad & tenemos\ rendimientos\ de\ escala\ constantes \\ \alpha + \beta < 1 \quad & tenemos\ rendimientos\ de\ escala\ decrecientes \\ \alpha + \beta > 1 \quad & tenemos\ rendimientos\ de\ escala\ crecientes \end{aligned}$$

La propiedad de rendimientos a escala constantes indica que cuando los insumos cambian, la producción cambia en forma proporcional.

Obtendremos rendimientos decrecientes, cuando uno de los factores de producción aumenta y los demás permanecen constantes, la productividad cae. Esta es la productividad marginal.

Supongamos que tenemos la función de producción $Y = 1.01K^{0.25}L^{0.75}$. La vamos a analizar utilizando curvas de nivel.

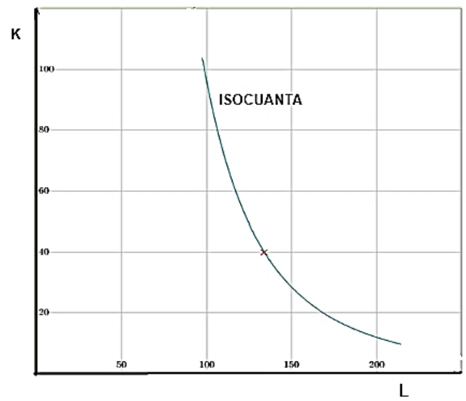
Tomemos un valor fijo de $Y = 100$ y calculamos todos las combinaciones de K y L que producen ese resultado. Es decir, podemos escribir la función así;

$$100 = 1.01K^{0.25}L^{0.75}$$

Despejamos el valor de K,

$$K = \left[\frac{100}{1.01L^{0.75}}\right]^{\frac{1}{0.25}} \quad o\ bien\ K = \left[\frac{100}{1.01L^{3/4}}\right]^{4}$$

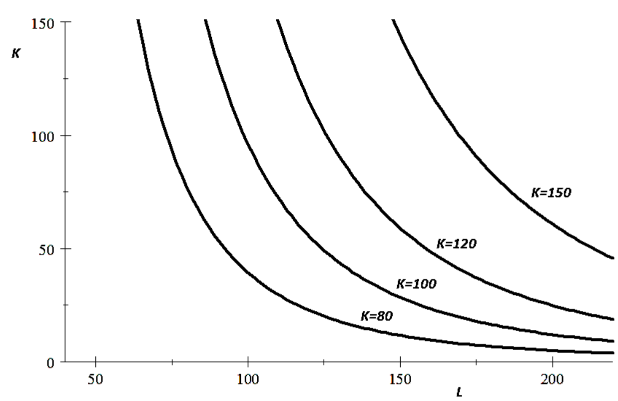
Tenemos ahora una función en una variable independiente. Con esta fórmula encontramos los valores de K para un conjunto de valores de L, en una representación gráfica,



L	k
100	96.1
110	72.2
120	55.6
130	43.74
140	35.02
150	28.5
160	19.56
180	16.48
200	12.01

A esta curva de nivel se le denomina "Curva de Isoproducto" o "Isocuanta", porque a lo largo de ella el producto es el mismo, en este caso igual a 100. La isocuanta puede interpretarse como las combinaciones o técnicas posibles de capital y trabajo para producir de manera eficiente 100 unidades. ¿Cuál de esas combinaciones escogerá el productor si tiene que producir 100 unidades? Eso dependerá de los precios relativos del capital y del trabajo. Si el capital es caro en relación con la fuerza de trabajo, entonces se usará más capital que trabajo que en otra circunstancia en la que el capital sea barato en relación con el trabajo. En la gráfica anterior podemos dibujar numerosas (infinitas) curvas de nivel que corresponden a la misma función, pero para valores de Y diferentes de 100.

La siguiente gráfica muestra las curvas Isocuantas a diferentes niveles de producción.



6.2 Derivadas parciales

Para una función de dos variables con (x, y) asociados a $g(x, y)$, podemos estudiar la existencia en cada punto (x_0, y_0) de su dominio, la existencia de dos derivadas llamadas derivadas parciales. Si dejamos una variable fija $'y'$ variamos la otra, tendremos una función de una variable ya que las otras serán consideradas como constantes. Es decir, tendremos una función $f(x) = g(x_0, y_0)$, donde y_0 es una constante, que para nuestro caso vale 'y'. Visto de esta manera, la función f es una función numérica de una variable real x si fijamos la variable y a un cierto valor y_0 y la derivada de esta función es, con la notación de Leibniz,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Así, si f es una función de dos variables x y y, la derivada parcial de f con respecto a 'x' o 'y' está definida por,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad y$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h,) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Siempre que los límites existan.

El símbolo $\frac{\partial f}{\partial x}$ se lee "derivada parcial de f con respecto a x. Otras notaciones comúnmente utilizadas son f_x o f_y y también D_x o D_y para referirse a las parciales de f con respecto a $'x'$ y $'y'$ respectivamente.

Las derivadas parciales se calculan con las mismas reglas utilizadas en la evaluación de las derivadas para una sola variable. Solo debemos recordar que excepto la variable de derivación el resto de las variables deben ser consideradas como constantes.

Ejemplos. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ para las siguientes funciones.

a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^3 + 5y^2$

Seguimos las mismas reglas que para las derivadas de una variable. Primero calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}$, recordemos que la variable y se comporta como una constante, entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x^3+3xy^3+5y^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3)+\frac{\partial}{\partial x}(3xy^3)+\frac{\partial}{\partial x}(5y^2)\\ &= 3x^2+3y^3\frac{\partial}{\partial x}(x)+0\\ &= 3x^2+3y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(x^3+3xy^3+5y^2) &= 0+3x\frac{\partial}{\partial y}(y^3)+\frac{\partial}{\partial y}(5y^2)\\ &= 9xy^2+10y\end{aligned}$$

b) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

Ahora aplicamos la regla del cociente,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy)-(xy)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(x^2+y^2)y-(xy)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2y+y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Para la parcial de f con respecto a y procedemos de manera similar,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(xy)-(xy)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(x^2+y^2)x-(xy)(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3+xy^2-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

c) $f(x,y)=(x^3-3y^2)^5$

Por la regla de la potencia generalizada.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x^3-3y^2)^5 &= 5(x^3-3y^2)^4\frac{\partial}{\partial x}(x^3-3y^2)\\ &= 5(x^3-3y^2)^4(3x^2)=15x^2(x^3-3y^2)^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(x^3-3y^2)^5 &= 5(x^3-3y^2)^4\frac{\partial}{\partial y}(x^3-3y^2)\\ &= 5(x^3-3y^2)^4(-6y)=-30y(x^3-3y^2)^4\end{aligned}$$

d) $g(x,y)=\sqrt{x^3+2y^2}$

Nuevamente aplicamos la regla de la potencia generalizada

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x^3+2y^2)^{1/2} &= \frac{1}{2}(x^3+2y^2)^{\frac{1}{2}-1}\frac{\partial}{\partial x}(x^3+2y^2)\\ &= \frac{1}{2}(x^3+2y^2)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2y^2}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3+2y^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^3+2y^2)^{\frac{1}{2}-1}\frac{\partial}{\partial y}(x^3+2y^2)$$
$$= \frac{1}{2}(x^3+2y^2)^{-\frac{1}{2}}(4y) = \frac{4y}{2\sqrt{x^3+2y^2}}$$

Para la evaluación de Las derivadas parciales en un punto (x_0, y_0), se sigue el mimo criterio que para cualquier función. Por ejemplo,

$f(x,y) = xy^3 - e^{xy}$, evaluar en $f_x(2,1)$ y $f_y(3,-1)$

Primero obtenemos las derivadas parciales y al final evaluamos en el punto señalado.

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}(xy^3 - e^{xy})\right|_{(2,1)} = y^3\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) = y^3 - ye^{xy} \qquad \text{al evaluar tenemos}$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial x}(xy^3 - e^{xy})\right|_{(2,1)} = 1 - e^2 \qquad \text{y la parcial de } f \text{ con respecto a } y$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial y}(xy^3 - e^{xy})\right|_{(3,-1)} = x\frac{\partial}{\partial y}(y^3) - \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) = 3xy^2 - xe^{xy} \quad \text{al evaluar tenemos}$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial y}(xy^3 - e^{xy})\right|_{(3,-1)} = 9 - 3e^{-3}$$

a) $f(x,y) = e^x \ln\ (y+3)$, para $x = 1$ y $y = 3$

Aplicamos la regla de la multiplicación y después evaluamos,

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}(e^x \ln\ (y+3))\right|_{(1,3)} = (\ln\ (y+3))\frac{\partial}{\partial x}(e^x)$$
$$= [\ln\ (y+3)]e^x \qquad \text{al evaluar tenemos}$$
$$= e^1 \ln(6) = 2.718(1.791) = 4.87$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial y}(e^x \ln\ (y+3))\right|_{(1,3)} = e^x\frac{\partial}{\partial y}(\ln\ (y+3)) = \frac{e^x}{y+3} + 0$$
$$\text{al evaluar tenemos}$$
$$= \frac{e^1}{6} = 0.453$$

Ejercicios.

1. *Encontrar los dominios de las siguientes funciones*
   a. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 + y^2}$
   b. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{9 - y^2}$
   c. $f(x,y) = \frac{\ln(x-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

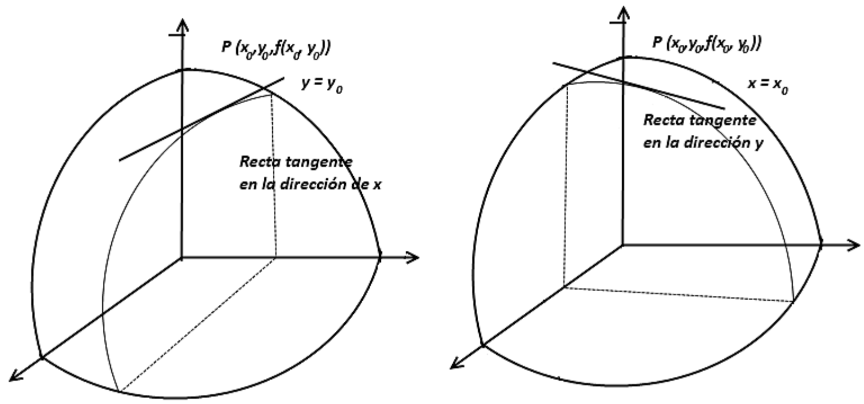
d. $f(x, y) = \ln(4 - x^2 + y^2)$

2. *Obtener la gráfica de las siguientes funciones, utilizando curvas de nivel para los valores de k que se indican.*
   a. $f(x, y) = x^2 + y^2$ *para los valores de* $k = 0,1,2,3$
   b. $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ *para los valores de* $k = 0,1,2,3$
   c. $f(x, y) = x^2 - y^2$ *para los valores de* $k = -1,0,1,2,3$
   d. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ $para\ los\ valores\ de\ k = 0,1,2,3$
3. *Para cada una de las siguientes funciones, obtenga sus derivadas parciales.*
   a. $f(x, y) = \frac{2x^2}{y} - 5x^2y^3$
   b. $f(x, y) = (x^2 - 4y^3)^{-1}$
   c. $f(x, y) = x^2 + xy^3 - y^4$, $f_x = (2, -7)$ y $f_y = (3, -1)$
   d. $f(x, y) = e^{x+y}$
   e. $f(x, y) = ln(x + 3y)$
   f. $g(x, y) = x^3 \, ln \; y$
   g. $f(x, y) = e^{4x^4y^3}$
   h. $f(x, y, z) = \frac{z^2 - y}{x + 3y^2 - 2z^3}$
4. *Sea* $f(x, y, z) = x^2 e^{\sqrt{y^2 + z^2}}$ *calcular para* $f_x(1,0,1)$ y $f_y(5,2,3)$
5. *Sea* $f(x, y) = x^2 e^{3x} \, ln \, y$
6. *Sea* $f(x, y) = (x - lny)e^{xy}$
7. $f(x, y) = \frac{x^3y^3}{x + y}$ *demostrar que* $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = 5f(x, y)$

6.2.1 Interpretación geométrica de las derivadas parciales.

La interpretación geométrica de las derivadas parciales es análoga a la de las funciones de una variable. Si tenemos la función $f(x, y)$, su representación gráfica en un espacio $\mathbb{R}^3$. Si se mantiene, digamos $y = y_0$ entonces $f(x, y_0)$ es la ecuación de la gráfica de esta función y el plano $y = y_0$. En este plano $f(x, y_0)$ se puede calcular la recta tangente en cualquier punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Para encontrar la pendiente en un punto de un plano $y = y_0$, obtenemos la derivada parcial de la función con respecto a x. De manera análoga para encontrar la pendiente en un punto del plano $x = x_0$, obtenemos la derivada parcial de la función con respecto a y.

Gráfica 6.6 Interpretación geométrica de las derivadas parciales



6.2.2 Derivadas parciales y tasa de cambio.

La derivada parcial $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ mide la tasa de variación de la función cuando x cambia. En otras palabras, si la variable y permanece constante e incrementamos x en una unidad, se produce un cambio en la función $f(x,y)$ que es aproximadamente igual a $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. Algo similar ocurre cuando la variable que varía es y, la tasa de variación es $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Así, las derivadas parciales pueden emplearse para aproximar los cambios de valor de la variable dependiente si se produce un cambio en una de las variables independientes.

Supongamos que, para una empresa, durante un periodo de tiempo, la función de producción es $f(x,y) = 56x^{3/4}y^{1/4}$, donde x son las unidades que requieren de mano de obra, además y representa las unidades de capital que son necesarios para producir un cierto número de artículos.

a) Determinar las derivadas parciales, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$
b) Evaluar $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ cuando $x = 81$, $y = 16$
c) Interpretar los resultados

Solución,

a) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 56\left(\frac{3}{4}\right)x^{-1/4}y^{1/4} = 42\frac{y^{1/4}}{x^{1/4}} = 42\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 56\left(\frac{1}{4}\right)x^{3/4}y^{-3/4} = 14\frac{x^{3/4}}{y^{3/4}} = 14\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{4}}$$

b) $\frac{\partial f(81,16)}{\partial x} = 42\frac{(16)^{1/4}}{(81)^{1/4}} = 28$

$\frac{\partial f(81,16)}{\partial y} = 14\frac{(81)^{3/4}}{(16)^{3/4}} = \frac{189}{4}$

c) La productividad marginal de la mano de obra $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ aumenta en 28 unidades de producción; si el capital se mantiene constante en 16 y se incrementa el trabajo en una unidad. Por otro lado, la productividad marginal del capital $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ aumenta en $\frac{189}{4}$ unidades de producción, cuando el trabajo se mantiene constante y el capital aumenta en una unidad. Estas productividades marginales son siempre positivas; sin embargo, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ disminuyen si el capital o el trabajo respectivamente aumentan.

6.2.2.1 Costo marginal.

Una función de costo conjunto es aquella en la que se concentran los costos totales de producción de dos o más artículos similares, que se fabrican en conjunto, y que pueden diferir en su presentación final, su sabor, aroma, o algo que los haga distintos al consumidor, pero que su proceso de producción sea básicamente el mismo.

Si la función de costo conjunto de producir las cantidades x y y de dos satisfactores está determinada por:

$$C(x, y)$$

Las derivadas parciales de C son las funciones de Costo Marginal.

$\frac{\partial C}{\partial x}$ es el costo marginal con respecto a x

$\frac{\partial C}{\partial y}$ es el costo marginal con respecto a y

De esta manera, el costo marginal con respecto a x, proporciona información sobre los incrementos en los costos totales de producción cuando se altera la fabricación del artículo x, en una unidad, mientras la producción de y se mantiene constante. De manera similar, el costo marginal con respecto a y , representa los incrementos en el costo total cuando aumentamos la producción del artículo y, manteniendo la fabricación de x constante.

Ejemplo. Un fabricante produce 3 unidades de un artículo x y 6 unidades de un artículo y. Los costos de producción son, acuerdo a la función $C(x,y) = 15 + 2x^2 + xy + 5y^2$. Si se desea incrementar la producción total a 10 unidades, ¿cuál es la opción más conveniente, incrementar la fabricación de x o de y?

La primera opción sería incrementar la producción del artículo x de 3 a 4 y mantener y constante en 6 artículos. La segunda sería incrementar las unidades de y de 6 a 7 manteniendo a x constante en 3 unidades. La mejor elección deberá ser aquella que nos ofrezca los costos más bajos. Los costos marginales de cada producto:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 4x + y \quad para\ x = 3, y = 6 \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 18$$
$$\frac{\partial C}{\partial x} = x + 10y \ para\ x = 3, y = 6 \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 63$$

Esto significa que incrementar la producción del producto x, en una unidad, manteniendo a y constante, incrementa los costos totales en \$18, mientras que aumentar la producción del producto y, en una unidad, conservando a x constante, incrementa los costos totales en \$63. Así, aumentar la producción del artículo x es la mejor selección.

Ejemplo. Un granjero puede producir $f(x,y) = 200\sqrt{6x^2 + y^2}$ unidades de huevo con x unidades de trabajo y y unidades de capital.

a. Calcular las productividades marginales de trabajo y de capital cuando $x = 10$ y $y = 5$.
b. Utilice el resultado anterior para determinar el efecto en producción de una reducción a $9\frac{1}{2}$ unidades de trabajo y 5 unidades de capital.

Solución:

(a) Las derivadas parciales son,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 200\left(\frac{1}{2}\right)(6x^2 + y^2)^{-1/2}(12x)|_{(10,5)} = \left.\frac{1200x}{\sqrt{6x^2 + y^2}}\right|_{(10,5)} = \frac{1200(10)}{\sqrt{625}} = 480$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 200\left(\frac{1}{2}\right)(6x^2 + y^2)^{-1/2}(2y)|_{(10,5)} = \left.\frac{200y}{\sqrt{6x^2 + y^2}}\right|_{(10,5)} = \frac{200(5)}{\sqrt{625}} = 40$$

La productividad marginal del trabajo=480, del capital = 40,

(b) El efecto de una reducción en la producción,

$$f(10,5) - f(9.5,5) = 200\sqrt{6(10)^2 + 5^2} - 200\sqrt{6(9.5)^2 + 5^2} = 5000 - 4760 = 240$$

240 menos unidades producidas

Paralelamente, si la cantidad z de un cierto producto se obtiene utilizando las cantidades x y y, respectivamente, de dos factores de producción, la función de producción $z = f(x,y)$ proporciona la cantidad de producto final z cuando se usan simultáneamente las cantidades x y y de insumos.

Las derivadas parciales del producto final z con respecto a las cantidades x y y de insumos, representan las *productividades marginales* de cada material.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = Productividad\ Marginal\ del\ insumo\ x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = Productividad\ Marginal\ del\ insumo\ y$$

La productividad marginal será, entonces, el incremento que sufre la cantidad de producto terminado, por cada unidad de insumo que se agregue a la mezcla, manteniendo a los demás insumos constantes. Es la capacidad que tiene el insumo de incrementar el producto terminado z.

Supongamos que la cantidad z de un artículo se produce mezclando las cantidades x y y de materiales. Tal producción se calcula mediante la ecuación

$$z = 4x^{3/4}y^{1/4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y^{1/4}}{x^{1/4}}\ \ representa\ la\ productividad\ marginal\ del\ insumo\ x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^{3/4}}{y^{3/4}}\ \ representa\ la\ productividad\ marginal\ del\ insumo\ y$$

Cantidades precisas de insumo, dan mayor significado a la productividad. Por ejemplo, la función de producción de un artículo se determina por la ecuación.

$$z(x,y) = 4xy + 3x^2 - 2y^2 + 200$$

Se mezclan 3 unidades del insumo x con 5 de y. Si sustituimos estas cantidades de insumo en z, obtendremos $z = 237$, que es la cantidad total de producto con esta mezcla. Pero si sustituimos estas mismas cantidades en las productividades marginales,

Así tendremos que

$\frac{\partial}{\partial x} = 4y + 6x,$ para $x = 3$, $y = 5$ y $\frac{\partial}{\partial x} = 38,$

Que es el valor que incrementa la producción de z cuando agregamos una unidad más del ingrediente x a la mezcla.

De igual manera, la productividad marginal del producto y;

$$\frac{\partial}{\partial y} = 4x - 4y, \quad \text{para } x = 3, y = 5, \text{ es igual a } -8$$

Este resultado indica una reducción de 8 unidades en el producto z, cuando agregamos una unidad adicional del insumo y.

Las productividades negativas se interpretan como reducciones en la producción total por habernos excedido en el insumo: demasiada agua, demasiado fertilizante, demasiados obreros en una sola línea de producción tienden a perjudicar la producción en lugar de beneficiarla.

Ejercicios. *Encontrar los costos marginales para las siguientes funciones de costo conjunto:*

1. $C(x,y) = x^2(y + 10)$
2. $C(x,y) = (x + 2y)^2 + (xy)^{1/2} + 5$
3. $C\ (x,y) = x^3 + 2y^2 - xy + 20$
4. $C(x,y) = x^2y^2 - 3xy + y + 8$

6.2.2.2 Funciones de demanda

Si se consideran dos bienes relacionados para los cuales las cantidades demandadas son q_A y q_B, siendo p_A y p_B los respectivos precios, entonces las funciones de demanda pueden representarse por las funciones

$$q_A = f_A(p_A, p_B) \quad y \quad q_B = f_B(p_A, p_B)$$

Suponiendo que las cantidades demandadas, q_A y q_B, dependen solamente de los precios, p_A y p_B, de los artículos. Si estas funciones son continuas, podrán ser representadas como una superficie denominada *superficie de demanda*[5].

[5] Una superficie de demanda para dos artículos es una representación entres dimensiopnes, que muestra la variación de la demanda de dos articulos en función de sus precios.

Una función de demanda proporciona información sobre el comportamiento de las ventas de un artículo dependiendo de su precio unitario. Si bien en algunos casos de demanda, las ventas varían en función de su propio precio, de manera que sus incrementos o disminuciones, son provocados sólo por cambios en los precios unitarios. En la práctica, no siempre pasa esto. A pesar de que el precio de un artículo no cambie, su demanda puede variar; debido a la influencia que tiene sobre el artículo, el precio de otro con el cual se relaciona.

Dos artículos en el mercado pueden ser competitivos o sustitutos, cuando sirven para satisfacer la misma necesidad. Los bienes sustituibles son intercambiables. El ejemplo más común es el de los medios de transporte, un estudiante para ir a su escuela podrá elegir entre el autobús o el metro; otro ejemplo serían las bebidas como café y té, aunque en este caso las necesidades que se buscan satisfacer no son exactamente las mismas.

Si hablamos de una economía de solo dos bienes, aun así, serían sustituibles; es decir, si el consumo del producto A disminuye, el del producto B aumentará.

Por ejemplo, los sistemas de transporte; un aumento en el precio del automóvil nos induce a utilizar el transporte colectivo.

Por otro lado, dos o más artículos son complementarios cuando se requieren de todos para satisfacer una necesidad. Un ejemplo muy común son los autos y la gasolina, uno no funciona sin el otro. Si el precio del auto aumenta, la demanda de gasolina disminuye y al contrario; si el precio de los autos disminuye, la demanda de gasolina aumenta.

Para caracterizar la relación que guardan dos o más artículos, se utilizan sus funciones de demanda y de la teoría marginal para que, para que a partir de las derivadas parciales se determine el tipo de relación que guardan.

La demanda de un bien A; $q_A = f_A(p_A, p_B)$, depende no sólo de su precio p_A, sino también se ve influenciada por precio de otro bien B p_B. De igual forma, para la función de demanda $q_B = f_B(p_A, p_B)$, además de depender de su propio precio p_B, también los cambios en el precio p_A, influyen sobre ella.

Para estas dos funciones de demanda, $q_A = f_A(p_A, p_B)$ y $q_B = f_B(p_A, p_B)$, tenemos cuatro derivadas parciales de primer orden, que son relaciones de demanda marginal

$\frac{\partial q_A}{\partial p_A}$ Mide el comportamiento del producto A, por incremento unitario en su precio p_A, mientras que el precio del producto B permanece constante.

$\frac{\partial q_A}{\partial p_B}$ Mide el aumento en la demanda del producto A, por incremento unitario en el precio del producto B; y el precio de A permanece constante

$\frac{\partial q_B}{\partial p_B}$ Mide el comportamiento del producto B, por incremento unitario en su precio p_B; y el precio del producto A es constante

$\frac{\partial q_B}{\partial p_A}$ Mide el aumento en la demanda del producto B, por incremento unitario en el precio del producto A, p_A; y el precio del producto B es constante.

De esta manera, si el precio del producto B permanece constante, en la mayoría de los casos, un incremento en el precio del articulo A provoca una disminución en la demanda de A (q_A). En otras palabras,

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_A} < 0$$

Igualmente, si el precio de A es constante,

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_B} < 0$$

Estos dos resultados o derivadas, no nos dan información sobre la naturaleza de la relación entre los dos artículos.

En una relación competitiva, el incremento en el precio p_A del artículo A, provoca un incremento en la demanda del artículo B, ya que se deja de consumir A, por ejemplo; los zapatos, ropa. Por otro lado, en la relación complementaria, la disminución en el consumo del artículo A, también provoca que el consumo de B también baje, ya que satisfacen juntos una misma necesidad, son productos cuya demanda aumenta o disminuye simultáneamente; por ejemplo, autos y gasolina, bebidas embotelladas y azúcar.

Las ecuaciones de demanda marginal que nos dan información para poder identificar la forma como se relacionan los artículos son,

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} \;\; y \;\; \frac{\partial q_B}{\partial p_A}$$

Los signos de estas demandas marginales nos indicarán el tipo de relación que guardan los artículos.

- Si $\frac{\partial q_A}{\partial p_B} > 0 \ y \ \ \frac{\partial q_B}{\partial p_A} > 0$ son positivas, los artículos son *competitivos o sustitutos*.
- Si $\frac{\partial q_A}{\partial p_B} < 0 \ y \ \ \frac{\partial q_B}{\partial p_A} < 0$ son negativas, los artículos son *complementarios*.
- Si los signos de las demandas marginales no son iguales, los artículos no están relacionados.

Ejemplos.

a) Suponer que p_A es el precio del artículo A y p_B el precio del artículo B, y que las ecuaciones de demanda para ambos artículos se determinan por:

$$q_A = 13 - 5p_A + 2p_B \ \ , \ q_B = 15 + p_A - 3p_B$$

Encontrar la naturaleza de la relación entre los artículos “A” y “B”.

Calculamos las correspondientes derivadas parciales;

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 2 \ \ y \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} = 1$$

Como ambas derivadas son positivas, concluimos que los artículos son competitivos. Los valores numéricos representan la magnitud del incremento en los artículos demandados por cada aumento en el precio.

b) Si las ecuaciones de demanda fueran:

$$q_A = 20 - 2p_A - p_B \ \ , \ q_B = 9 - p_A - 2p_B$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = -2 \ \ y \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} = -1$$

Ambas derivadas son negativas, por lo que los artículos son complementarios.

c) Las demandas de dos productos son,

$$q_A = 300 + 5p_B - 7{p_A}^2 \ \ y \quad q_B = 250 + 2p_A - 9p_B$$

¿Los productos son competitivos o complementarios?

Solución, las derivadas parciales de los productos que requerimos son,

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 5 \quad\ y \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} = 2$$

Las parciales son positivas, los productos son competitivos.

Ejercicios. *Para las siguientes funciones de demanda, encontrar la naturaleza de la relación entre los artículos x y y (p es el precio de x y q es el precio de y).*

1) $x = 20 - 6p - 4q, \;\; y = 12 - 8p - 6q$

2) $x = 10 - 8p + 2q, \;\; y = 4 - 3p - 2q$

3) $x = 8 - 5p + 3q, \quad y = 7 + p - 5q$

4) $x = \frac{9p^2}{2q^3}, \;\; y = \frac{5q}{2p^4}$

5) $x = -\frac{6}{pq^2}, \quad y = -\frac{14}{p^2q}$

6) $x = 15 - 2p + q$
$y = 16 + p - q$

7) $x = 5 - 2p + q$
$y = 8 - 2p - 3q$

8) $x = {}^{p}/_{q}\;; \quad y = {}^{p^2}/_{q}$

9) $x = {}^{4}/_{pq^2}\;; \qquad y = {}^{16}/_{pq^2}$

Obtener las productividades marginales para cada una de las siguientes funciones de producción:

10) $z = 25 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

11) $z = 80 + 4(x-5)^2 + 2(y-4)^2$

12) $z = 5xy - 2x^2 - 2y^2$

13) $z = 6x^{1/2}y^{1/2} - 24y + x^2 + 4y^2 + 50$

Respuestas

1) $\frac{\partial x}{\partial q} = -4, \;\; \frac{\partial y}{\partial p} = -8$ complementarios

2) $\frac{\partial x}{\partial q} = 2, \;\; \frac{\partial y}{\partial p} = -3$ sin relación

3) $\frac{\partial x}{\partial q} = 3, \;\; \frac{\partial y}{\partial p} = 1$ competitivos

4) $\frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{27p^2}{2q^4} \quad y \quad \frac{\partial y}{\partial p} = -\frac{10q}{p^5}$ complementarios

5) $\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{12}{pq^3} \;\; y \;\; \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{28}{p^3q}$ competitivos

6) $\frac{\partial x}{\partial q} = 1, \;\; \frac{\partial y}{\partial p} = 1$ competitivos

7) $\frac{\partial x}{\partial q} = 1, \;\; \frac{\partial y}{\partial p} = -2$ sin relación

8) $\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{-p}{q^2} \;\; y \;\; \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{2p}{q}$ sin relación

9) $\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{-8}{pq^3}$, $\frac{\partial y}{\partial p} = \frac{-16}{p^2q^2}$ complementarios

10) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$

11) $\frac{\partial z}{\partial x} = 8(x - 5)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4(y - 4)$

12) $\frac{\partial z}{\partial x} = 5y - 4x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5x - 4y$

13) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y^{1/2}}{x^{1/2}} + 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x^{1/2}}{y^{1/2}} + 8y - 24$

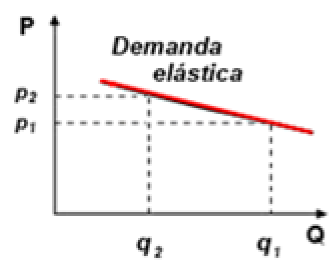
6.2.2.3 Elasticidad de la demanda

La elasticidad de la demanda o elasticidad precio de la demanda de un bien, es útil para medir la variación de la demanda de un producto a un cambio en su precio. La demanda no solo cambia si su precio se modifica, también se altera si los precios de productos complementarios o sustitutos relacionados con este bien cambian. Para que la oferta y la demanda sean de utilidad, es necesario conocer la medida en que alguna de ellas cambia cuando se modifica el precio.

Supongamos dos artículos, A y B. Para medir la variación de la cantidad demandada de un artículo ante las variaciones de los precios de los bienes relacionados, utilizamos la elasticidad de la demanda[6], que se define como el cambio porcentual en la demanda, dividida por el cambio porcentual en el precio.

$$\eta_{p_A} = \frac{\partial q_A / \partial p_A}{q_A / p_A} = \frac{p_A}{q_A}\frac{\partial q_A}{\partial p_A}$$

Donde η_{p_A} Es la razón del cambio porcentual de la demanda de A al cambio porcentual en el precio de A cuando se fija el precio de B. Esta relación, precio y cantidad, es siempre negativa por eso se mide en valor absoluto.

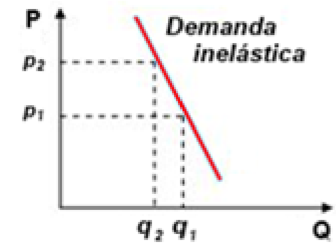


a) $|\eta_{p_A}| > 1$ La demanda es elástica, cambio en el precio del bien produce un cambio inverso en la demanda. Si el precio crece la demanda baja. Si la elasticidad es alta, los cambios en precio producen un cambio importante o grande en la demanda. Este tipo de elasticidad es común en los artículos suntuarios, como auto, perfumes, etc.

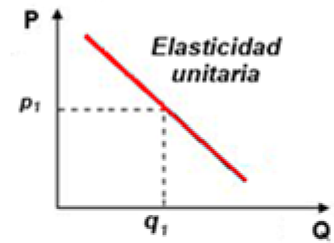
---

6 Por definición, la elasticidad precio de la demanda de un bien mide la reacción de la demanda de este producto cuando su precio cambia.

b) $|\eta_{p_A}| < 1$ La demanda es inelástica, cambios en el precio no modifican significativamente la demanda. Si el precio de un artículo, por ejemplo, la insulina aumenta, no reduce su consumo porque es un producto necesario. En general ocurre en los artículos de primera necesidad, como pan, tortilla, etc.



c) $|\eta_{p_A}| = 1$ Elasticidad unitaria. La cantidad demandada varía en la misma proporción que el precio del bien. Un producto puede varias en un 5% su demanda cae en la misma proporción.



Cuanto más horizontal sea la curva de demanda, mayor es la elasticidad de la demanda. Si la línea de demanda tiende a ser vertical, la elasticidad de la demanda será inelástica.

Elasticidad cruzada de la demanda

La ***elasticidad cruzada de la demanda*** permite conocer en qué medida la variación del precio de un bien afecta la demanda de otro bien. Si el precio aumenta, el consumidor tenderá a reducir su consumo del bien o su remplazo por un bien similar. Nos ayuda a entender si dos bienes son sustitutos o complementarios. Por ejemplo, para dos productos como manzanas y naranjas, cuando el precio de las manzanas aumenta, el consumidor quizá prefiera consumir naranja si el precio es más barato.

Este efecto se puede enunciar de la siguiente manera; la elasticidad cruzada de la demanda de un bien A en relación con el precio de un bien B, es igual a la relación entre el cambio porcentual de la cantidad demandada del bien A y el cambio porcentual en el precio del bien B. Es decir,

$$\eta_{p_B} = \frac{{\partial q_A}/{\partial p_B}}{{q_A}/{p_B}} = \frac{p_B}{q_A}\frac{\partial q_A}{\partial p_B}$$

Donde η_{p_B} es la Elasticidad cruzada de la demanda o elasticidad precio cruzada de la demanda del bien A con respecto a al precio p_B. De esta manera, η_{p_B} mide la respuesta de la demanda del producto A al cambio en el precio de B, cuando el precio de A se mantiene sin cambio.

La elasticidad cruzada de la demanda η_{p_B} puede ser positiva o negativa o cero.

a) Si η_{p_B} es positiva, la cantidad demandada del bien A aumenta cuando se incrementa el precio de B, p_B. En este caso los bienes son competitivos o sustitutos.
b) Si $\eta_{p_B} < 0$ los bienes son complementarios; es decir, una variación en el precio del bien B provoca una variación inversa en la demanda de A.
c) Cuando $\eta_{p_B} = 0$ indica que una variación en el precio de B no tiene efecto en la demanda de A. En este caso, los bienes son independientes. El consumidor no puede remplazar el consumo de X con B.

De manera similar, para calcular la elasticidad cruzada de la demanda del bien *B* con respecto a al precio p_A.

$$\eta_{p_A} = \frac{p_A}{q_A}\frac{\partial q_A}{\partial p_A}$$

η_{p_A} mide la respuesta de la demanda del producto *B* al cambio en el precio de *A*, cuando el precio de B se mantiene sin cambio.

Ejemplo.

a) Una empresa artesanal fabrica un tipo de dulce que tiene como función de demanda $q_A = 15 + 0.4{p_B}^2 - 3{p_A}^3$. Donde p_A es el precio de dulce que fabrica la empresa y p_B es el precio de un dulce equivalente de la competencia.

   Cuáles son las elasticidades $\eta_{p_A}\ y\ \eta_{p_B}$, si los precios de los productos son $p_A = 3$ y $p_B = 35$.

   Partimos de las derivadas parciales,

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = -9{p_A}^2 \quad y \quad \frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 0.8p_B$$

Así, cuando $p_A = 3$ y $p_B = 35$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = -9(3)^2 = -81 \quad y \quad \frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 28$$

La demanda a este nivel de precio es, $q_A = 15 + 0.4(35)^2 - 3(3)^3 = 424$

$$\eta_{p_B} = \frac{p_B}{q_A}\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = \frac{35(28)}{424} \cong 2.311$$

$$\eta_{p_A} = \frac{p_A}{q_A}\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = \frac{3(-81)}{424} \cong -0.57 \quad y$$

Estas elasticidades nos indican que un incremento de 1% en el precio de la competencia produce un aumento en la demanda del 2.311% del dulce que fabrica la empresa artesanal; por otro lado, un incremento del 1% del precio del dulce de la empresa provocara una caída del 0.57% en su demanda.

6.2.2.4 Derivadas de segundo orden.

Las derivadas de primer orden de una función $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$, tienen una derivada de primer orden con respecto a x_n.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots., \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Estas derivadas primeras, pueden a su vez volver a derivarse, se llaman derivadas parciales de segundo orden y así sucesivamente lo que define las derivadas parciales de orden superior, con respecto a la variable x_1.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \ldots$$

De la misma manera, las derivadas parciales con respecto a la variable x_2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \ldots.$$

Mas específicamente, para una función de dos variables $f(x, y)$ las derivadas parciales segundas serían las 4 cuatro siguientes,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Las derivadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se les conoce como derivadas parciales mixtas o derivadas cruzadas.

Ejemplo. Obtener las derivadas parciales de segundo orden y sus derivadas mixtas de la función. $f(x, y) = 2x^3 + 3xy^2 - 4y^4$

Solución. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x^2 + 3y^2$ $\qquad$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6xy - 16y^3$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 6y \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 6y$$

Teorema de Schwartz[7]***.***

Sea $f(x, y)$ una función en el espacio real $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}$. Sí,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Existen y son continuas, se puede demostrar que,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Ejemplo,

Dada la siguiente función. $z = f(x, y) = 8x^3 - 4xy^2 - 10y^3$, encontrar las derivadas segundas parciales y las mixtas.

---

[7] También se lo conoce como teorema de Clairaut. Laurent Schwarts fue un matemático francés, nacido en París, 5 de marzo de 1915, su aporte más conocido es sobre la teoría de las distribuciones, Recibió la medalla Fields en 1950. Referencia http://es.wikipedia.org/wiki/Laurent_Schwartz

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 24x^2 - 4y^2 \ ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -8y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -8xy - 30y^2 \ ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -8y$$

Las derivadas parciales mixtas son iguales

Ejercicios. Encontrar las derivadas parciales de las siguientes funciones,

a) $f(x,y) = 2x^3 + x^3y^2 - 3y^4$
b) $f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x+y}$
c) $f(x,y) = 5x^3y^2 + 3e^{3y}$ $\quad f_x = 15x^2y^2;\ f_{xx} = 30xy^2;\ f_y = 10x^3y + 9e^{3y}$
$\quad f_{yy} = 10x^3 + 27e^{3y};\ f_{xy} = 30x^2y;\ f_{yx} = 30x^2y$
d) $f(x,y) = \frac{x^3y^3}{2x+2y}$
e) $f(x,y) = (x^3 + y^2)^{\frac{5}{2}}$

Funciones compuestas y Regla de la cadena.

En el capítulo IV, cálculo en una variable, se presentó la derivación de funciones compuestas de una sola variable, por la regla de la cadena,

$$Si, y = f(x) \ \ y \ \ x = g(t)$$

Donde f y g son funciones continuas y diferenciables, para encontrar su derivada aplicamos la regla de la cadena.

$$\frac{dy}{dt} = f'\big(g(t)\big)g'(t) \qquad \text{ó} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

En el caso de varias variables, dada una función compuesta $z = F(x,y)$ con derivadas parciales continuas y las funciones derivables $x = f(t)$, $y = g(t)$, la regla de la cadena para estas funciones compuestas es,

$$z = f\big(x(t), y(t)\big) \qquad\qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Es la derivada total de z con respecto a t

Ejercicios,

a) Sea $z = f(x, y) = 2x^2 + y^2 + xy$ donde $x = 5t$ y $y = t^3$ encontrar $\frac{dz}{dt}$
Aplicamos la formula anterior de la regla de la cadena.

$$\frac{dz}{dt} = (4x + y)(5) + (2y + x)(3t^2) = 20x + 5y + 6yt^2 + 3xt^2$$

Sustituimos las variables x, y y nos queda,

$$\frac{dz}{dt} = 20(5t) + 5t^3 + 6t^3t^2 + 3(5t)t^2 = 100t + 5t^3 + 6t^5 + 15t^3 =$$
$$= 6t^5 + 20t^3 + 100t$$

b) Si $u = x + 2x^{1/2}y - 4xy^{1/2}$ donde $x = {}^4\!/_{3t}$ y $y = {}^{t^2}\!/_3$ calcular $\frac{du}{dt}$

Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{du}{dt} = \left(1 + \frac{y}{x^{1/2}} - 4y^{1/2}\right)\left(-\frac{4}{3t^2}\right) + \left(2x^{1/2} - \frac{2x}{y^{1/2}}\right)\left(\frac{2}{3}t\right)$$

$$= \left(1 + \frac{t^2}{3\sqrt{\frac{4}{3t}}} - 4\sqrt{\frac{t^2}{3}}\right)\left(-\frac{4}{3t^2}\right) + \left(2\sqrt{\frac{4}{3t}} - \frac{8}{3t\sqrt{\frac{t^2}{3}}}\right)\left(\frac{2}{3}t\right)$$

$$= -\frac{4}{3t^2} - \frac{4}{9\sqrt{\frac{4}{3t}}} + \frac{16}{3t^2}\sqrt{\frac{t^2}{3}} + \frac{4}{3}t\sqrt{\frac{4}{3t}} - \frac{16}{9\sqrt{\frac{t^2}{3}}}$$

$$= -\frac{4}{3t^2} - \frac{2}{9\sqrt{\frac{1}{3t}}} + \frac{16\sqrt{\frac{t^2}{3}}\sqrt{\frac{t^2}{3}}}{3t^2\sqrt{\frac{t^2}{3}}} + \frac{4t\sqrt{\frac{4}{3t}}\sqrt{\frac{4}{3t}}}{3\sqrt{\frac{4}{3t}}} - \frac{16}{9\sqrt{\frac{t^2}{3}}}$$

$$= -\frac{4}{3t^2} - \frac{2}{9\sqrt{\frac{1}{3t}}} + \frac{16t^2}{9t^2\sqrt{\frac{t^2}{3}}} + \frac{16t}{9t\sqrt{\frac{4}{3t}}} - \frac{16}{9\sqrt{\frac{t^2}{3}}}$$

$$= -\frac{4}{3t^2} - \frac{2}{9\sqrt{\frac{1}{3t}}} + \frac{16}{9\sqrt{\frac{t^2}{3}}} + \frac{16}{9\sqrt{\frac{4}{3t}}} - \frac{16}{9\sqrt{\frac{t^2}{3}}} = -\frac{4}{3t^2} - \frac{2}{9\sqrt{\frac{1}{3t}}} + \frac{16}{9(2)\sqrt{\frac{1}{3t}}}$$

$$= -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3t^2}} + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{9}\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3t}}}} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3t^2}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3t}}}}$$

c) Supongamos que los insumos de capital y trabajo de una determinada compañía varían en el tiempo de la siguiente forma,

$$k(t) = 2t^2 \quad y \qquad l(t) = 2t + 5$$

Si la función de producción para esta empresa es $q(k,l) = kl^2$. Determinar la tasa de cambio de la producción con el tiempo.

Solución, la tasa de cambio es,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial k}\frac{dk}{dt} + \frac{\partial q}{\partial l}\frac{dl}{dt}$$

Así

$$\frac{dq}{dt} = l^2(4t) + 2kl(2) = 4l^2t + 4kl$$

$$\frac{dq}{dt} = 4t(2t+5)^2 + 4(2t^2)(2t+5) = (2t+5)(16t^2+20t)$$

d) La demanda de un cierto producto es,

$q_A = 50\frac{\sqrt{3p_B}}{\sqrt[3]{2p_A^2}}$ $donde\ p_A\ y\ p_B$ Son los precios de los productos A y B.

Si El comportamiento de los precios siguen las siguientes reglas,

$$p_A = 45 + .25t - 0.03t^2 \qquad y \quad p_B = 150 + .2t - 0.05t^2$$

Donde t es el tiempo en meses. Determinar la demanda después de un año.

Solución, se tiene que resolver la ecuación,

$$\frac{dq_A}{dt} = \frac{\partial q_A}{\partial p_A}\frac{dp_A}{dt} + \frac{\partial q_A}{\partial p_B}\frac{dp_B}{dt}$$

Entonces,

$$\frac{dq_A}{dt} = 50\sqrt{3p_B}\left[\frac{\partial}{\partial p_A}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2p_A^2}}\right)\right](.25 - 0.06t) + \frac{50}{\sqrt[3]{2p_A^2}}\left[\frac{\partial}{\partial p_A}\sqrt{3p_B}\right]\ (.2 - 0.1t)$$

$$= 50\sqrt{3p_B}\left[\frac{\partial}{\partial p_A}(2p_A^2)^{-1/3}\right](.25 - 0.06t) + \frac{50\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2p_A^2}}\left[\frac{\partial}{\partial p_A}(p_B)^{1/2}\right](.2 - 0.1t)$$

$$= 50\sqrt{3p_B}\left(-\frac{1}{3}\right)(2p_A^2)^{-4/3}(4p_A)(.25 - 0.06t) + \frac{50\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2p_A^2}}\left(\frac{1}{2}\right)(p_B)^{-1/2}(.2 - 0.1t)$$

$$= \left(-\frac{200p_A\sqrt{3p_B}}{(3)\sqrt[3]{(2p_A^2)^3 2p_A^2}}\right)(.25 - 0.06t) + \left(\frac{25\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2p_A^2}\sqrt{p_B}}\right)(.2 - 0.1t)$$

$$= \left(-\frac{200p_A\sqrt{3p_B}}{(3)(2p_A^2)\sqrt[3]{2p_A^2}}\right)(.25 - 0.06t) + \left(\frac{25\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2p_A^2}\sqrt{p_B}}\right)(.2 - 0.1t)$$

$$= \left(-\frac{100\sqrt{3p_B}}{(3)p_A\sqrt[3]{2p_A^2}}\right)(.25 - 0.06t) + \left(\frac{25\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2p_A^2}\sqrt{p_B}}\right)(.2 - 0.1t)$$

Para t= 12 meses tenemos

$$p_A = 45 + .25(12) - 0.03(12)^2 = 43.68 \quad y \quad p_B = 150 + .2(12) - 0.05(12)^2 = 145.2$$

Sustituimos estos valores

$$\frac{dq_A}{dt} = (-1.019)(-0.47) + (0.2299)(-1) = 0.249$$

Una generalización de la regla de la cadena se da cuando $z = f(x, y)$ y las variables x y y dependen de otras variables, por ejemplo u y w. En este caso, si las funciones tienen derivadas parciales continuas la función $z = f(g(u, w), h(u, w))$ y su derivada, de acuerdo con la regla de la cadena serán igual a las siguientes derivadas parciales.

Si $z = f(x, y) \quad y \quad x = g(u, w); \;\; y = h(u, w)$

Entonces tenemos dos derivadas parciales,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad y \qquad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}$$

Ejemplos,

a) Encontrar $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$ de la función $z = e^{2x+y}$ $\quad x = (u, w) = \frac{u^2 - 3uw}{2}$

$y = (u, w) = uw + w^2$

Se aplica la regla de la cadena de acuerdo con su generalización,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (2e^{2x+y})\left(\frac{2u - 3w}{2}\right) + (e^{2x+y})(w) = e^{2x+y}(2u - 2w)$$

Este resultado lo expresamos en términos de u y w, así

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2e^{\frac{2(u^2-3uw)}{2}+uw+w^2}(u-w) = 2e^{u^2-3uw+uw+w^2}(u-w)$$
$$= 2e^{(u-w)^2}(u-w)$$

De la misma manera encontramos la derivada de $\frac{\partial z}{\partial w}$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = (2e^{2x+y})\left(\frac{-3u}{2}\right) + (e^{2x+y})(u+2w) = e^{2x+y}(-3u+u+2w)$$
$$= -2e^{2x+y}(u-w)$$

Expresamos el resultado en términos de u y w,

$$\frac{\partial z}{\partial w} = -2e^{\frac{2(u^2-3uw)}{2}+uw+w^2}(u-w) = -2e^{(u-w)^2}(u-w)$$

b) Una empresa manufacturera elabora dos tipos de chocolates, con almendras (q_A) y con nuez (q_N), los precios son $p_A \; y \; p_N$ respectivamente. La función de costos correspondiente a estos productos es,

$$c(q_A, q_N) = 0.02(q_A+q_N)^3 - 0.1(q_A+q_N)^2 + 3(q_A+q_N) + 300$$

Y las funciones de demanda

$$q_A = 125 + p_A^2 - 0.1p_N^2;$$
$$q_N = 130 - 0.1p_A^2 + 2p_N^2$$

Por la regla de la cadena calcular $\frac{\partial c}{\partial p_A}$. Evaluar este cálculo para $p_A = 2 \; y \; p_N = 3$

La regla de la cadena para este ejercicio es,

$$\frac{\partial c}{\partial p_A} = \frac{\partial c}{\partial q_A}\frac{\partial q_A}{\partial p_A} + \frac{\partial c}{\partial q_N}\frac{\partial q_N}{\partial p_A}$$

Así, obtenemos sus derivadas y nos queda

$$\frac{\partial c}{\partial p_A} = [0.06(q_A+q_N)^2 - 0.2(q_A+q_N) + 3](2p_A)$$
$$+[0.06(q_A+q_N)^2 - 0.2(q_A+q_N) + 3](-0.2p_A)$$

Si $p_A = 2$ y $p_N = 3$

$$q_A = 125 + 4 - 0.9 = 128.1$$

$$q_N = 130 - 0.1(4) + 2(9) = 147.6$$

$$\frac{\partial c}{\partial p_A} = [4508.5](4) + [4508.5](-0.4) = 16230.6$$

6.2.2.5 *Derivación implícita*

Suponga que z es función de las variables x y y, dada implícitamente a través de una ecuación, por ejemplo $f(x, y, z) = 0$, y se quiere determinar la derivada de z con respectos a alguna de las dos variables. Muchas veces resulta imposible despejar z en función de las otras dos variables. El método de derivación implícita no requiere el despeje de z para calcular las derivadas parciales de z con respecto a x ó y.

Para encontrar la derivada de $\frac{\partial z}{\partial x}$ de una función implícita, como $z^2 - 3x^2y + y^2z = 0$, podemos aplicar el siguiente método de solución.

1. Sustituimos z en la función implícita por $z = f(x, y)$, en el caso de dos variables.
2. Calculamos la derivada con respecto x
3. Recuperamos el valor de z sustituyendo $f(x, y)$ por z

Sustituimos con $z = f(x, y)$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)^2 - 3x^2y + y^2f(x,y)) = 0$$

Derivada con respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)^2 - 3y\frac{\partial}{\partial x}x^2 + y^2\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 0$$

Recordemos que $\frac{df(x)^n}{dx} = nf(x)^{n-1}\frac{df(x)}{dx}$, así

$$2f(x,y)\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) - 6xy + y^2\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 0$$

$$(2f(x,y) + y^2)\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 6xy \;\; \rightarrow \;\; \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{6xy}{2f(x,y) + y^2}$$

Finalmente se sustituye $f(x, y)$ por z y encontramos la derivada buscada,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6xy}{2z + y^2}$$

Una fórmula alternativa para simplificar el proceso de derivación, con base en la regla de la cadena, se obtiene de la siguiente manera. Para tres variables la regla nos dice que, si tenemos una función $F(x, y, z) = 0$ y además $z = f(x, y)$. Esto significa que $F\big(x, y, f(x, y)\big) = 0$. Si las funciones F y f son diferenciales, entonces por la regla de la cadena derivamos con respecto a una de las variables, por ejemplo x tendremos,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Es claro que $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ lo que nos queda,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Despejamos la derivada que nos interesa,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Que es la fórmula de cálculo rápido que nos interesa.

La función f es $f(x, y, z) = 0$, y las derivadas parciales, $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial z}$ son simples, en la primera y, z son consideradas como constante y en la segunda parcial x, y son constantes. De la misma manera podemos obtener,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Para el ejemplo anterior $z^2 - 3x^2y + y^2 = 0$. Las derivadas parciales que se requieren son,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -6xy \qquad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3x^2 + 2y$$

Sustituimos en las fórmulas rápidas y nos queda,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{6xy}{2z} = \frac{3xy}{z} \qquad y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{3x^2 - 2y}{2z}$$

Ejemplo. Dada la ecuación $e^{(x-2y^2)} + xyz = 2x^2 - yz$,

encontrar $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(2,1,1)}$ por diferenciación parcial implícita.

Solución por método general

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{(x-2y^2)} + xyz\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 - yz)$$ La variable y se considera constante

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{(x-2y^2)}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(xyz) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(yz)$$ Separamos y resolvemos cada término

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x}e^{-2y^2}\right) + y\left[x\frac{\partial z}{\partial x} + z\right] = 4x - y\frac{\partial z}{\partial x}$$ Realizamos la multiplicación

$$e^{-2y^2}\frac{\partial}{\partial x}(e^x) + xy\frac{\partial z}{\partial x} + yz = 4x - y\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$e^{x-2y^2} + xy\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - yz$$ Agrupamos términos

$$(xy + y)\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - yz - e^{x-2y^2}$$ Finalmente, la solución es

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{4x - yz - e^{x-2y^2}}{(xy + y)}\right)$$ Evaluamos en el punto (2,1,1)

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(2,1,1)} = \frac{8 - 1 - 1}{3} = 2$$

Solución por método alternativo $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$

$$e^{(x-2y^2)} + xyz - 2x^2 + yz = 0$$ Obtenemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{(x-2y^2)}+xyz-2x^2+yz\right) = e^{(x-2y^2)}+yz-4x$$ Las variables y, z son constantes

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{(x-2y^2)}+xyz-2x^2+yz\right)=xy+y$$ Sustituimos en formula anterior

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(e^{(x-2y^2)}+yz-4x)}{xy+y}$$ Evaluamos en el punto (2,1,1)

Ejercicios.

1. *Encuentre* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *por cualquiera de los métodos de diferenciación parcial implícita donde* $xya+z^3=xy^2+yx^2$
2. *Dadas las siguientes funciones y si* z *es una función de* x *y* y. *Encuentre por diferenciación implícita* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial z}{\partial y}$
   - $a)$ $yz^2+x^2y=3y^3+5$ $\quad$ $b)$ $z^2+2e^{xyz}+5xy^2=5$
   - $c)$ $z^2+y^2z-x^2z=1$ $\quad$ $d)$ $ln(x+yz)=1+xy^2z^3$
   - $e)$ $xy^5+3x^2y^2z^2+5x^5yz=12$ $\quad$ $f)$ $xe^y+ze^x=xyz$
   - $g)$ $ln(xy)+y^2z=xz^3$ $\quad$ $h)$ $e^{xz}+e^{yz}+5xy^2=1$
3. *Para las funciones siguientes, encuentre las derivadas parciales que se solicitan en el punto que se señala.*
   - *a)* $yz^2+x^2y=x^3+1$ *Evaluar cuando* $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(2,1,3)}$
   - $b)$ $z^2+e^{xz}+xy=-1$ *Evaluar para* $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(1,1,2)}$
   - $c)$ $ln(xz)-2yz=3$ *Evaluar para* $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(1,1,1)}$

6.2.2.6 Diferencial total.

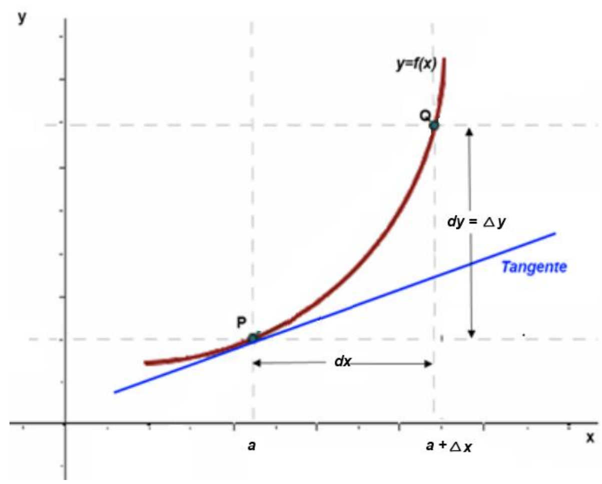
Si recordamos que para una función de una variable $y = f(x)$, la diferencial[8] dy se define como

$$dy = f'(x)dx$$

En el caso de varias variables, ya hemos mencionado que las derivadas parciales son tasas de cambio. Sirven para conocer que tanto cambia una función con respecto a pequeños cambios de su variable.

Si Δx y Δy, son valores pequeños en un punto (a, b). Un cambio de Δx unidades en la variable x, produce un cambio en la función $f(x, y)$ de $\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\right]\Delta x$ unidades y un cambio en y de Δy unidades, aproximadamente de $\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right]\Delta y$ unidades, no nos sorprende que ambas coordenadas cambien, este cambio es aproximadamente,

En una gráfica podemos representar esta función y sus incrementos así,



$$F(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = \left[\frac{\partial f(a, b)}{\partial x}\right]\Delta x + \left[\frac{\partial f(a, b)}{\partial y}\right]\Delta y$$

[8] Las ecuaciones diferenciales se utilizan para mostrar como una variable cambia con respecto a otra. Por ejemplo, como cambia el Producto Interno bruto (PIB) en el tiempo.

La expresión del lado derecho es la diferencial total y depende de los valores de Δx y Δy y de las derivadas parciales. Si escribimos $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$, que se lee "diferencial de x y diferencial de y " tendemos

$$F(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Y las derivadas parciales son evaluadas para $x = a$, $y = b$, si solo tenemos dos variables.

En conclusión, una diferencial es un cambio infinitesimal en una función de una o más variables, resultante de cambios infinitesimales en todas las variables.

Ejemplo. Una empresa que elabora un tipo de dulce tiene un volumen de ventas de acuerdo con la siguiente ecuación.

$$V(w,p) = 2500 + 50(1-w)e^{-2p}$$

Donde w es el gasto en mercadotecnia de la empresa y p el precio unitario del dulce. Calcular las ventas totales si $w = 12$ (miles de pesos) y $p = 1$. A partir de este resultado estimar las ventas cuando la publicidad aumenta a 12.5 y el precio se reduce $0.90.

Para este caso las ventas totales son de

$$V(12{,}1) = 2{,}500 + 50(1-12)e^{-2} = 2{,}425.6$$

La estimación de las ventas para v(12.5,0.9), se obtiene a partir de,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial w}dw + \frac{\partial V}{\partial p}dp$$

$$\frac{\partial V}{\partial w} = -50e^{-2p} \quad y \quad \frac{\partial V}{\partial p} = -100e^{-2p}(1-w)$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial w}\right|_{(w,p)=(12,1)} = -50e^{-2(1)} = -6.7668 \quad y \quad \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_{(w,p)=(12,1)} = -100e^{-2}(-11) = 148.87$$

$$dV = -6.76668dw + 148.87dp$$

Los valores de dw y dp son; $dw = 12.5 - 12 = 0.5$ y $dp = 0.9 - 1 = -.1$ de esta manera

$$dV = -6.76668(.5) + 148.87(-0.1) = -18.27$$

$$V(12.5{,}0.9) \cong v(12{,}1) - 18.27 = 2425.6 - 18.27 = 2407.3$$

Las ventas crecen en 2,407.3

El valor que obtenemos al aplicar directamente en la ecuación es $\mathrm{V}(12.5,0.9)=2{,}405$, la diferencia, o error, es de 2.3

***Ejemplo**.* La función de producción de una empresa es $\mathrm{P}(\mathrm{l},\mathrm{k})=450\mathrm{l}^{3/5}\mathrm{k}^{2/5}$ donde P es la producción que se obtiene cuando se emplean l unidades de mano de obra y k unidades de capital. Si en un momento dado se ocupan 243 unidades de mano de obra y 32 de capital.

a) Aproxime el efecto en la producción de incrementar la mano de obra 248 unidades y disminuir el capital 31 unidades monetaria.
b) Calcular el cambio porcentual en la producción.

Solución,

a) Si representamos el cambio en la producción como dp, y el incremento en la mano de obra y el capital como dl y dk respectivamente tendremos la ecuación,

$$dP=\frac{\partial P}{\partial l}dl+\frac{\partial P}{\partial k}dk$$

Las derivadas parciales,

$$dP=\left(450\left(\frac{3}{5}l^{-2/5}\right)k^{2/5}\right)dl+\left(450\left(\frac{2}{5}k^{-3/5}\right)l^{3/5}\right)dk$$
$$dP=270\left(\frac{k^{2/5}}{l^{2/5}}\right)dl+180\left(\frac{l^{3/5}}{k^{3/5}}\right)dk$$

Si tenemos que, $l=243,\ k=32,\ dl=248-243=5$ y $dk=31-32=-1$

$$dP=270\left(\frac{32^{2/5}}{243^{2/5}}\right)(5)+180\left(\frac{243^{3/5}}{32^{3/5}}\right)(-1)=600-607.5=-7.5$$

De esta manera la producción disminuye aproximadamente de 7.5 unidades.

b) El cambio porcentual de la producción es $\%P=\frac{dP}{P}100$. Entonces,

$$\%P=\frac{-7.5}{450(243)^{3/5}(32)^{2/5}}100=\frac{-750}{48600}=-0.015\%$$

La producción cae en un 0.015%

Ejercicios.

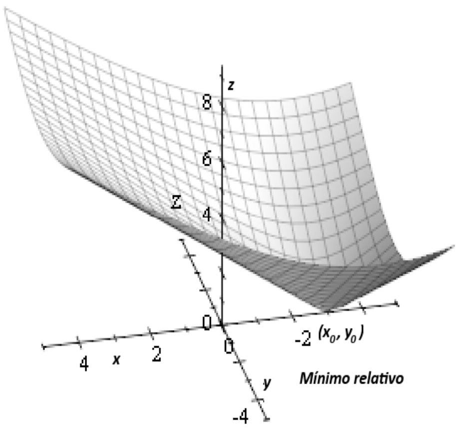
1. *Una empresa que fabrica embaces de cristal, tiene una función de producción tipo Cobb-Douglas* $f(x,y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$, *donde "*$x$*" son las unidades de trabajo y "*y*" de producción. Estimar el cambio en la producción de embaces si el número de unidades de trabajo cambia de 225 a 300 y si el capital se mueve de 450 a 475. Encontrar el cambio porcentual en la producción.*
2. *Si la función de producción fuera* $Q(k,l) = 120k^{2/3}l^{1/3}$ *botellas de vidrio. Estime el porcentaje en que cambia la producción diaria si el capital aumenta un 2% y la mano de obra 3%.*
3. *En una empresa electrónica la producción diaria es* $P(x,y) = 60x^{1/3}y^{2/3}\ unidades$, *donde* x *representa la fuerza laboral y* y *la inversión de capital. Estimar el porcentaje de cambio en la producción si el número de unidades de trabajo cambia en 3% y el capital en 2%.*
4. *Las utilidades de una organización de productores agrícolas que comercializa trigo y maíz, a un precio de* p_1 *y* p_2 *respectivamente. Estudios propios establecen una función de producción* $B(p_1,p_2) = 500p_1 + 1000p_2 - 10000 - (50p_1^2 + 100p_2^2 - 10p_1p_2)$. *Cuando* $p_1 = 100$ *y* $p_2 = 50$ *las utilidades de la empresa son de $200,000. ¿Cuál sería el efecto si el precio del maíz se incrementa en una unidad y el del trigo en 0.20?*

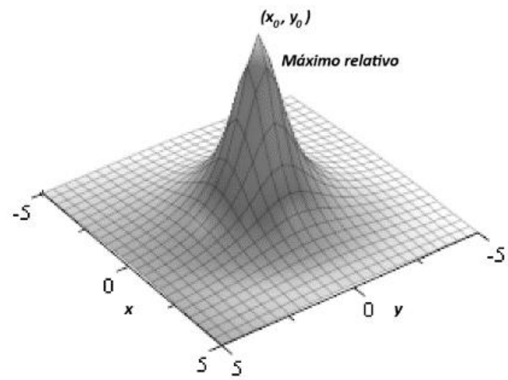
wsMáximo s y mínimos.

El procedimiento para encontrar máximos y mínimos de una función de varias variables es muy similar al caso de funciones de una variable. Para determinar los puntos donde se alcanza un máximo o un mínimo en una función de una variable $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$, partimos de las derivadas primera y segunda.

Por definición, una función f tiene un mínimo local o relativo en (x_0, y_0) si el valor de la función en este punto es menor a los valores que toma en los puntos vecinos. Es decir, si $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ para todo (x,y) en una región que contenga a (x_0,y_0). Si nos fijamos en la gráfica de la función que tiene un mínimo en un punto (x_0,y_0), vemos que en este punto el plano tangente es horizontal. La situación es la misma para el máximo.

Los puntos mínimos relativos corresponden geométricamente a los valles o baches y los máximos relativos a las crestas. En estos puntos las derivadas parciales son cero. En otras palabras, son puntos estacionarios. Por lo tanto, para que una función $\mathrm{f(x,y)}$ tenga un máximo o un mínimo en un punto (x_0, y_0), es necesario que la primera derivada de la función sea,

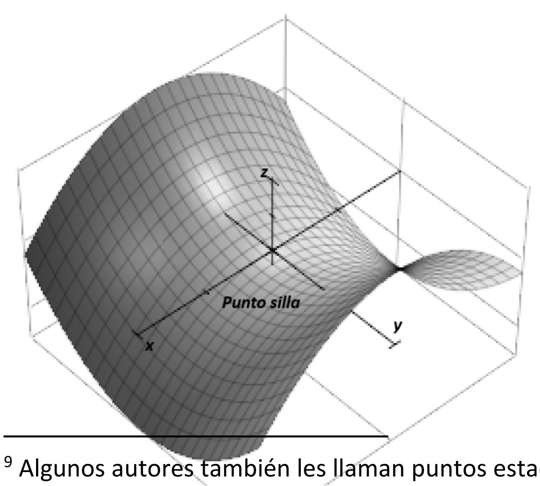




$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$$

Estos puntos máximos o mínimos son llamados valores extremos relativos o locales de la función[9]. El máximo valor que toma la función se conoce como máximo absoluto y el menor valor es el mínimo absoluto.

Los máximos o mínimos no son necesariamente los máximos o mínimos absolutos de la función. Más adelante veremos condiciones necesarias y suficientes para que encontrar cuando tenemos un punto máximo o mínimo absoluto.



Un tercer caso de puntos extremos son los llamados “puntos silla”, por la similitud de la gráfica con una silla de montar. Un punto silla tiene mínimo desde un lado del eje y máximo en el otro eje.

[9] Algunos autores también les llaman puntos estacionarios

Ejemplo, Encontrar los puntos extremos para la siguiente función,

a) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + y^3$

Las derivadas parciales de primer orden,

$$f_x(x,y) = 6x^2 - 6y$$
$$f_y(x,y) = -6x + 3y^2$$

Igualamos a cero y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante,

$$\begin{matrix} 6x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{matrix} \rightarrow 6y = 6x^2 \rightarrow \begin{matrix} y = x^2 \\ 3(x^2)^2 - 6x = 0 \end{matrix} \rightarrow x(3x^3 - 6) = 0$$

Las soluciones a esta última ecuación, $x(3x^3 - 6) = 0$, de aqui $x = 0$.
Se sustituye este valor en $y = x^2$, $y = (0)^2$.
El punto $(0, 0)$ es un punto extremo de la función.
El otro valor se obtienes al despejar la ecuación

$$3x^3 - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x^3 = \frac{6}{3} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$$

Se sustituye en la ecuación $y = x^2 \quad \rightarrow \quad y = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \quad \therefore \quad y = \sqrt[3]{4}$

El punto $\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right)$, es el segundo punto extremo.

b) $\mathrm{f(x,y) = y^3 + x^2y - 2x^3 - y^2 + 2}$
c) $f(x,y) = x^3 + y^4 - 6x - y^2$
d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2$
e) $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

Esta última ecuación la resolveremos por la técnica de factorización. Primero factorizamos el lado izquierdo sacando x de factor común

$$x(4x^5-3)=0$$

Planteamos tantas ecuaciones como factores, igualando cada factor a cero:

$x=0$ ó $4x^5-3=0$ (en la última ecuación despejamos x^5)

$x=0$ ó $x^5=\frac{3}{4}$ (elevamos ambos miembros a $\frac{1}{5}$ o de manera similar tomamos raíz quinta)

$x=0$ ó $x=\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$.

- Para encontrar y cuando $x=0$ sustituimos en (1) o (2), la que consideremos más fácil de resolver, escogemos (1)

  $y=(0)^2$

  Así (0,0) es un punto crítico de la función.
- Para encontrar y cuando $x=\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$ sustituimos en (1) y despejamos y.

$$y=\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)^2$$

En conclusión $\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}},\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)^2\right)$ es el otro punto crítico de la función.

Ejemplo Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y)=x^3+y^4-12x-2y^2$.

Solución:

1.- Conseguimos primero las derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x,y)=3x^2-12$$
$$f_y(x,y)=4y^3-4y$$

2.- Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$

En este caso queda:

$$\begin{cases} 3x^2-12=0 & (1) \\ 4y^3-4y=0 & (2) \end{cases}$$

Este también es un sistema de ecuaciones **no lineal,** pero en este caso cada ecuación depende de una sola variable, **no hay interrelación** entre las variables del sistema. Las soluciones de la ecuación (1) son $x=\pm 2$. La ecuación (2) la resolvemos por factorización,

$$4y(y^2-1)=0$$

De aquí

$y=0$ ó $y^2-1=0$

Así las soluciones de $4y^3-4y=0$ son $y=0,\pm 1$

Los puntos críticos en este caso están dados por todas las combinaciones de las soluciones de x y y, ellas son: $(2,0),(2,1),(2,-1)$, $(-2,0),(-2,1)$ y $(-2,-1)$.

Efectivamente cada uno de estos puntos satisface las dos ecuaciones del sistema de ecuaciones.

Para funciones de tres o más variables (asuma que las derivadas parciales existen y son continuas), los conceptos anteriores pueden extenderse rápidamente. Por ejemplo si tenemos $w = f(x, y, z)$ es claro cuales deben ser las definiciones de máximos y mínimos relativos y los puntos críticos definidos como las soluciones del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \\ f_z(x,y)=0 \end{cases}$$

son los únicos candidatos a máximos y mínimos relativos.

Ejemplo Encontrar los puntos críticos de la función $f(x, y, z) = x^2 + xy - 3xz - 2z - z^2$.

Solución:

1.- Conseguimos primero las derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x,y) = 2x + y - 3z$$

$$f_y(x,y) = x$$

$$f_z(x,y) = -3x - 2 - 2z$$

2.- Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \\ f_z(x,y)=0 \end{cases}$

En este caso queda:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x = 0 \\ -3x - 2 - 2z = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lineales tiene como solución $x = 0, y = -3$ y $z = -1$.

Ejemplo Encontrar los puntos críticos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - xyz + z$.

Solución:

1.- Conseguimos primero las derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x,y) = 2x - yz$$

$$f_y(x,y) = 2y - xz$$

$$f_z(x,y) = -xy + 1$$

2.- Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \\ f_z(x,y)=0 \end{cases}$

En este caso queda $\begin{cases} 2x - yz = 0 \\ 2y - xz = 0 \\ -xy + 1 = 0 \end{cases}$

De nuevo estamos ante **un sistema de ecuaciones no lineal,** donde las variables **si están interrelacionadas.** En este sistema podemos despejar una de las variables en una ecuación y sustituirla en las otras ecuaciones, formando con estas últimas un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se intenta de resolver con las ideas vistas. En este caso podemos despejar cualquiera de las variables. Despejamos y en la tercera ecuación:

$y=\frac{1}{x}$ sustituimos esta variable en las dos primeras ecuaciones y formamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 2x-\left(\frac{1}{x}\right)z=0 \\ 2\left(\frac{1}{x}\right)-xz=0 \end{cases}$$

Tenemos un sistema de ecuaciones con las variables interrelacionadas, despejamos z en la segunda ecuación

$$z=\frac{2}{x^2}$$

Ahora sustituimos en la primera z por el lado derecho de esta última ecuación

$2x-\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x^2}\right)=0$. Sumamos fracciones

$\frac{2x^4-2}{x^3}=0$ Es una ecuación de la forma $\frac{P}{Q}=0$, planteamos $P=0$

$2x^4-2=0$ Despejamos la potencia y tomamos raíz cuarta

$x=\pm 1$

- Para $x=1$, tenemos por la ecuación $z=\frac{2}{x^2}$ que $z=2$ y por la ecuación $y=\frac{1}{x}$ tenemos que $y=1$. Así $(1,1,2)$ es un punto crítico.
- Para $x=-1$, tenemos por la ecuación $z=\frac{2}{x^2}$ que $z=2$ y por la ecuación $y=\frac{1}{x}$ tenemos que $y=-1$. Así $(-1,-1,2)$ es otro punto crítico.

Ejercicio de desarrollo.- Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z)=x^3-y^3-xz-yz$

b) $f(x,y,z)=x^3+y^3-xz-yz$

c) $f(x,y,z)=x^3+y^3+x-yz$.

Respuestas:

a) Tiene infinitos puntos críticos dados por $\{(x,-x,3x^2)/x\in R\}$.

c) No tiene puntos críticos.

Criterio de las segundas derivadas para clasificar los puntos críticos

Para clasificar los puntos críticos, calculamos en cada punto el valor del determinante hessiano H, llamado "Hessiano orlado"

$$H=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}=f_{xx}f_{yy}-\left(f_{xy}\right)^2$$

Entonces

• $H(x_0, y_0) > 0$ la función f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0).
• $H(a, b) < 0$ la función f tiene un punto silla en (x_0, y_0).
• $H(x_0, y_0) = 0$ no es un extremo relativo en (x_0, y_0).

CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARA CLASIFICAR LOS PUNTOS CRÍTICOS

Este criterio es la versión del criterio de la segunda derivada para clasificar puntos críticos de una función en una sola variable.

Esta versión para dos variables se basa en una cantidad D que depende de (x_0, y_0). Si esta cantidad es positiva o negativa se concluirá si la función f alcanza o no un extremo relativo en este punto. Luego, si tiene extremo, se procederá a examinar si es máximo o mínimo relativo a través de f_{xx}.

Criterio de las segundas derivadas.- Sea f una función de dos variables y (x_0, y_0) un punto crítico de f donde las primeras derivadas se anulan, tal que en una vecindad de este punto las segundas derivadas parciales son continuas. Sea

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left(f_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$$

1.- Si $D > 0$ entonces se alcanza **un extremo relativo** en (x_0, y_0) y

1.1 Si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ entonces $f(x_0, y_0)$ es un mínimo relativo.

1.2 Si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ entonces $f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo.

2.- Si $D < 0$ entonces $f(x_0, y_0)$ **no es un extremo relativo**.

3.- Si $D = 0$ el criterio no es concluyente.

Ejemplo Encontrar los máximos y mínimos relativos de la siguiente función: $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy$

Solución:

1.- Conseguimos primero los puntos críticos:

$$f_x(x, y) = 2x - 3y$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 3x$$

Planteamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

En este caso queda

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 & (1) \\ 3y^2 - 3x = 0 & (2) \end{cases}$$

Solucionamos este sistema despejando una de las variables en una de las ecuaciones y sustituyéndola en la otra ecuación. En este caso despejamos x en la segunda ecuación y la sustituimos en la primera.

$$\begin{cases} 2y^2 - 3y = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

La primera ecuación la resolvemos usando factorización

$$y(2y-3)=0$$

$$y=0 \text{ ó } 2y-3=0$$

$$y=0 \text{ ó } y=\frac{3}{2}$$

- **Si $y=0$ vemos que $x=0$ y así $(0,0)$ es un punto crítico.**
- **Si $y=\frac{3}{2}$ vemos que $x=\left(\frac{3}{2}\right)^2$ y así $\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$ es el otro punto crítico.**

2.- Para clasificar los puntos críticos usamos el criterio de las segundas derivadas. Pasamos entonces a conseguir las segundas derivadas.

$$f_{xx}(x,y)=2\,; \quad f_{yy}(x,y)=6y \quad \text{y} \quad f_{xy}(x,y)=-3$$

Calculamos

$$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-\left(f_{xy}(x,y)\right)^2$$

$$D(x,y)=(2)(6y)-(-3)^2=12y-9$$

Evaluamos $D(x,y)$ en cada punto crítico y aplicamos el criterio:

- $D(0,0)=12\cdot 0-9=-9$. Como $D(0,0)<0$, entonces concluimos que en $(0,0)$ no se alcanza extremos relativos. El punto $(0,0)$ es un punto de silla.
- $D(\frac{9}{4},\frac{3}{2})=12\cdot\frac{3}{2}-9=9$. Como $D(0,0)>0$, entonces en $\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$ se alcanza un extremo relativo. Pasamos a determinar si es máximo o es mínimo relativo a través del signo de f_{xx} evaluada en este punto crítico.

  $f_{xx}(\frac{9}{4},\frac{3}{2})=2>0$. Usando 1.1 del criterio de la segunda derivada concluimos que en $\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$ se alcanza un mínimo relativo.

Ejemplo Encontrar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x,y)=4-4y^2-x^4-y^4$.

Solución:

1.- Conseguimos primero los puntos críticos:

$$f_x(x,y)=-4x^3$$

$$f_y(x,y)=-8y-4y^3$$

Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$

En este caso queda:

$$\begin{cases} -4x^3=0 & (1) \\ -8y-4y^3=0 & (2) \end{cases}$$

La solución de este sistema es x=0 y y=0. Por tanto el punto (0,0) es el único punto crítico de la función.

2.- Para clasificar el único punto crítico intentamos usar el criterio de las segundas derivadas. Pasamos entonces a conseguir las segundas derivadas.

$$f_{xx}(x,y)=-12x^2\,; \quad f_{yy}(x,y)=-8-12y^2 \quad \text{y} \quad f_{xy}(x,y)=0$$

Calculamos

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2$$

$$D(x,y) = \left(-12x^2\right)\left(-8-12y^2\right) - 0^2$$ Ahora evaluamos D en el punto crítico

$$D(0,0) = (0)(-8) - 0 = 0$$

El criterio no es concluyente.

En este ejercicio podemos utilizar las características propias de la función para determinar un punto crítico. Expresamos la función de la forma

$$f(x,y) = 4 - 4y^2 - x^4 - y^4$$

Que es $<= 0$. Entonces para clasificar el punto crítico (0,0) usamos el siguiente argumento: Los últimos términos de la función son menores o iguales a cero, por tanto $\mathrm{f(x,y)} \leq 4$ y es 4 cuando $\mathrm{x} = 0$ y $\mathrm{y} = 0$. Así, 4 es el máximo valor de f y se alcanza en (0,0). Como vemos no solo es un máximo relativo si no también un máximo absoluto.

Ejemplo. Una empresa agropecuaria rural es productora de leche y derivados lácteos. Si x es la producción de leche en litros y y los derivados lácteos como; queso, crema, yogurt, etc. Esta empresa determina que su ganancia puede modelarse mediante la siguiente relación funcional,

$$P(x,y) = 60x + 120y - 0.015x^2 - 0.015y^2 - 0.01xy - 5000$$

Encontrar el nivel de producción que proporciona una ganancia máxima. ¿Cuál es esta ganancia?

Solución. En primer lugar, obtenemos las derivadas parciales de la función de beneficio e igualamos a cero para resolver el sistema

$$\begin{matrix} P_x = 60 - 0.03x - 0.01y \\ P_y = 120 - 0.03y - 0.01x \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 60 = 0.03x + 0.01y \\ 120 = 0.01x + 0.03y \end{matrix}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, multiplicamos la primera por -3

$$\begin{matrix} 0.03\mathrm{x} + 0.01\mathrm{y} = 60 \\ 0.01\mathrm{x} + 0.03\mathrm{y} = 120 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -0.09\mathrm{x} - 0.03\mathrm{y} = -180 \\ 0.01\mathrm{x} + 0.03\mathrm{y} = 120 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathrm{x} = 750 \\ \mathrm{y} = 3750 \end{matrix}$$

Este punto $(750, 3750)$ es un punto crítico. En este instante no podríamos asegurar que es un punto máximo por lo que aplicamos el criterio de la segunda derivada.

$$\mathrm{P_{xx}} = -0.03 \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{P_{xy}} = -0.01$$
$$\mathrm{P_{yy}} = -0.03$$

De esta manera $\mathrm{D} = (-0.03)(-0.03) - (-0.01)^2 = .0008$ mayor que cero por lo tanto es un punto extremo y como $\mathrm{P}_{xx} = -0.03$ es negativo el punto es máximo. Sustituimos este punto en la función de beneficio,

$$\mathrm{P}(750{,}3750) = 60(750) + 120(3750) - 0.015(750)^2 - 0.015(3750)^2$$
$$-0.01(750)(3750) - 5000 = 242,500$$

El beneficio máximo es de $242,500

Ejercicios

1. *Encontrar los máximos y mínimos relativos de la siguiente función*
$$\mathrm{f}(x, y, z) = e^{x^2+2y^2-xy+12x}$$
2. *Verifique que la función*
$$\mathrm{g}(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - xy + 12x$$
Alcanza sus extremos en los mismos puntos que la función f *anterior*

Mínimos cuadrados.

Supongamos que una empresa cuenta con los siguientes datos obtenidos por su comportamiento en el mercado.

P	12	10	8	9
Q	30	33	41	37

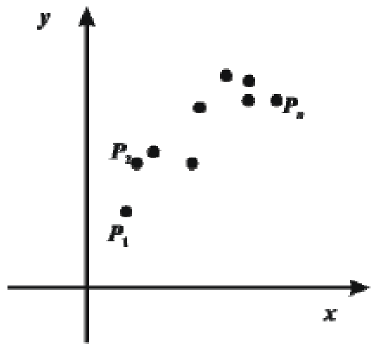
Estimar la ecuación de demanda. Utilice un modelo lineal.

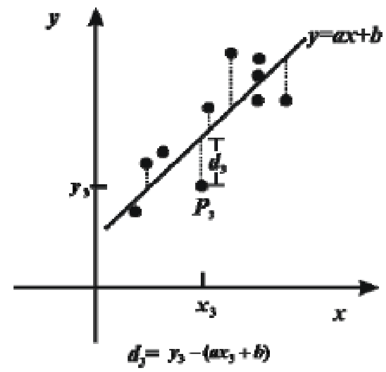
Este tipo de modelos son muy comunes en el análisis económico. La más simple será buscar la ecuación de la recta que mejor siga el comportamiento de los datos, por ejemplo $y = ax + b$. Por supuesto que vamos a buscar una recta "que se aproxime" o que siga el comportamiento de los puntos y lo que buscaremos es estimar la mejor,

$$y = \hat{a}x + \hat{b}$$

Por supuesto que hay muchas rectas que siguen el comportamiento de los datos, pero lo que buscamos es la que se desvíe lo menos posible de estos datos; es decir que la suma de las distancias perpendiculares de la recta a cada una de los puntos sea mínima. Es decir

$$|y_i - (ax_i + b)| \text{ sea mínima}$$





Así que para encontrar la recta que mejor se ajuste y que minimiza el error tendremos que encontrar los valores de a y b que minimizan,

$$\mathrm{D(a,b)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} (\mathrm{y_i} - (\mathrm{ax_i} + \mathrm{b}))^2$$

Que se lee, la suma de cuadrados de los errores que se cometen al aproximar una recta sea mínima, el cuadrado se debe a que las distancias superiores son positivas y las inferiores negativas lo anula el resultado.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0 \end{cases}$$

Se puede sacar factor común -2 en la primera ecuación y luego este factor pasa dividiendo. En la segunda ecuación se multiplica ambos miembro por -1.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i x_i - a x_i^2 - b x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a x_i - \sum_{i=1}^{n} b = 0 \end{cases}$$

En la primera ecuación se distribuyó x_i. En la segunda ecuación separamos la sumatoria.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} b x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} b = 0 \end{cases}$$

Se separó la sumatoria y se sacaron los factores constantes fuera de la sumatoria

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0 \end{cases}.$$

Si llamamos $S_{xy} = \sum x_i y_i$; $S_x = \sum x_i$; $S_{xx} = \sum x_i^2$ y $S_y = \sum y_i$, el último sistema de ecuaciones queda planteado como:

$$\begin{cases} S_{xy} - aS_{xx} - bS_x = 0 \\ S_y - aS_x - bn = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} aS_{xx} + bS_x = S_{xy} \\ aS_x + bn = S_y \end{cases}$$

Llamamos $\hat{a}$ y $\hat{b}$ las soluciones del sistema anterior, ellas estiman la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $y = ax + b$. Esto es conocido como una regresión de y sobre x.

Para el ejemplo anterior

q	12	10	8	9
p	30	33	41	37

Estime la ecuación de demanda usando el criterio de mínimos cuadrados, esto es, haga una regresión de q sobre p.

Solución: Planteamos la ecuación de demanda como una relación lineal, esto es una recta.

$$q = ap + b$$

Debemos conseguir a y b que minimizan

$$S = \sum_{i=1}^{4} (q_i - (ap_i + b))^2$$

Sustituimos nuestros datos

$$S = (12 - (a \cdot 30 + b))^2 + (10 - (a \cdot 33 + b))^2 + (8 - (a \cdot 41 + b))^2 + (9 - (a \cdot 37 + b))^2$$

Vamos ahora a buscar los puntos críticos de S

$$\begin{cases} S_a(a,b) = 0 \\ S_b(a,b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(12 - 30a - b)(-30) + 2(10 - 33a - b)(-33) + 2(8 - 41a - b)(-41) + 2(9 - 37a - b)(-37) = 0 \\ 2(12 - 30a - b) + 2(10 - 33 - b) + 2(8 - 41 - b) + 2(9 - 37 - b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2702 + 10078a + 282b = 0 \\ -78 + 282a + 8b = 0 \end{cases}$$

Las soluciones dan

$$\hat{b} = \frac{1206}{55}; \quad \hat{a} = -\frac{19}{55}.$$

Así la ecuación de demanda es estimada en este caso por $q = -\frac{19}{55}p + \frac{1206}{55}$.

Ejercicios

1. *Encontrar los puntos extremos de las siguientes funciones*
   a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$
   b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$
   c) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 3$
   d) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
   e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$
   f) $f(x, y) = x^4 - 2x^2y + 3y^2$
   g) $\mathrm{f(x, y)} = 2\mathrm{x}^3 + 6\mathrm{xy} - 3\mathrm{y}^2 + 2$
2.

Multiplicadores de Lagrange[10]

En las funciones de una variable independiente, se utilizaron estos multiplicadores para encontrar el número de unidades, producción o venta, más conveniente para que el costo, el ingreso o la utilidad sean óptimos.

Cuando trabajamos con funciones de varias variables, se puede seguir un proceso similar para optimizar una función económica. En muchos problemas hay restricciones que pueden afectar encontrar los valores óptimos reales, ya que partimos de restricciones económicas, como, el monto a invertir, las condiciones tecnológicas, etc. En un ejercicio anterior encontramos que para obtener un beneficio máximo tendríamos que producir x, y unidades; sin embrago quizá no contemos con los recursos suficientes para obtener estos valores.

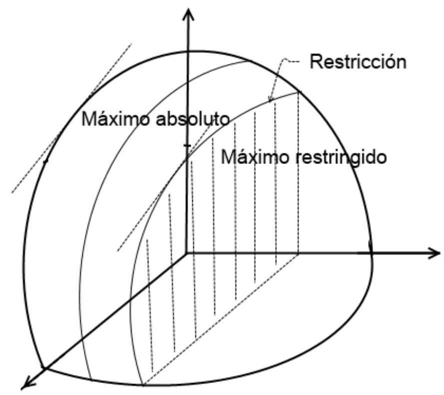
En una empresa, por ejemplo, encontramos que aumentar en cierta cantidad la producción nos ayudaria a maximizar el benficio. Sin embargo, tenemos restricciones de varios recursos como; economicos, de tecnología, mano de obra, etc.

El multiplicador Lagrange en varias variables, es útil para encontrar los valores máximos o mínimos de una función sujeta a restricciones. Presentado por el matemático italiano-francés Joseph-Louis Lagrange en el siglo XVIII, este método utiliza una nueva variable, llamada multiplicador Lagrange, para integrar la restricción en el problema y asi resolver de una manera eficaz.

[10] Matemático francés de origen italiano, nació en Turín Italia en 1736. Estudió en su ciudad natal y hasta los diecisiete años no mostró ninguna aptitud especial para las matemáticas. A los 19 años, fue Profesor de geometría en la Academia Militar de Turín. Falleció el 10 de abril de 1813 en París.

El método de Lagrange se aplica ampliamente en economía, cuando se requiere una solución óptima bajo restricciones. El multiplicador de Lagrange, una vez resuelto, muestra cuánto cambiaría la función objetivo ante un cambio marginal en la restricción.

Gráfico xxx. Método de Lagrange



En primer lugar veremos el método de los *multiplicadores de Lagrange* cuando se tienen restricciones de igualdad.

Supongamos que interesa optimizar la función $f(x,y)$ con base en la restricción de igualdad $g(x,y) = 0$, se parte de la *función objetivo*

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

En donde λ es el *Multiplicador de Lagrange*, independiente de las variables $'x'$, $'y'$. El multiplicador λ es una nueva variable que representa; la magnitud del cambio en la función objetivo por unidad de cambio en el límite de la restricción.

Como en cualquier programa de optimización de inicio se obtienen los puntos extremos.

Para obtener estos, se obtienen las derivadas parciales de $L(x,y,\lambda)$ con respecto a las 3 variables *x, y,* λ y se igualan a cero las derivadas resultantes; luego se resuelve el sistema de ecuaciones resultante para obtener los valores de las variables x, y.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0$$

Normalmente, los valores numéricos de λ, los multiplicadores de Lagrange, no se calculan, sirven solamente para determinar los valores de las variables.

Para determinar si un punto es máximo o mínimo, el criterio de la segunda derivada cambia un poco. Si $D < 0$, el punto crítico puede ser realmente un máximo o un mínimo de la restricción, aunque sea un máximo o un mínimo de la función objetivo.

Para analizar la naturaleza de un punto crítico (x_0, y_0) se recomienda seguir los siguientes pasos,

1. Construir la función de Lagrange e igualar las primeras derivadas a cero, para encontrar los puntos críticos,
2. Para determinar si el punto crítico es un máximo o un mínimo restringido,

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2$$

3. Si $D(x_0, y_0) > 0$, es un máximo si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \;\; y \;\; f_{yy}(x_0, y_0) < 0$
   Es un mínimo si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \;\; y \;\; f_{yy}(x_0, y_0) > 0$
   Si $D(x_0, y_0) \leq 0$ la prueba no es concluyente y se debe investigar la función cerca del punto crítico en el cual se evalúan.

Ejemplo. Obtener el mínimo de la función $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ sujeto a la restricción $x + 2y = 24$.

La función de Lagrange,

$$L(x, y, \lambda) = 5x^2 + 6y^2 - xy - \lambda(x + 2y - 24)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 10x - y - \lambda$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 12y - x - 2\lambda$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 24$$

Se iguala a cero cada una de las derivadas parciales,

$$\begin{aligned} &10x - y - \lambda = 0 && 10x - y = \lambda && \\ &12y - x - 2\lambda = 0 \implies && 12y - x - 2(10x - y) = 0 \implies && 21x - 14y = 0\left(\tfrac{1}{7}\right) \\ &x + 2y - 24 = 0 && && x + 2y = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ x + 2y &= 24 \end{aligned} \implies 4x = 24 \quad \therefore x = 6 \;\; y = 9$$

Este sistema tiene la solución $x = 6$, $y = 9$, por lo que $(6, 9)$ es un punto extremo que requiere que demostremos si es mínimo de $f(x, y)$. Utilizaremos el criterio de la segunda derivada visto con anterioridad.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 10 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 12 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial xy} = -1$$

$$D = (10)(12) - 1 = 119 \;\; > 0 \text{ es un punto extremo}$$

La derivada $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} > 0 \; y \; \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} > 0$, el punto extremo (6,9) es un mínimo restringido.

Ejemplo. Encontrar el máximo restringido de $f(x, y) = 2xy - 3y^2 - x^2$ con base en la restricción $x + y = 21$

$$L(x, y, \lambda) = 2xy - 3y^2 - x^2 - \lambda(x + y - 21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2y - 2x - \lambda\,; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2x - 6y - \lambda\,; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = (x + y - 21)$$

$$\begin{aligned} &-2x + 2y - \lambda = 0(-1) && 2x - 2y + \lambda = 0 && \\ &2x - 6y - \lambda = 0 \implies && 2x - 6y - \lambda = 0 \implies && 4x - 8y = 0 \\ &x + y - 21 = 0 && && x + y = 21(-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 8y &= 0 \\ -4x - 4y &= -84 \end{aligned} \rightarrow \; -12y = -84 \quad \therefore y = 7$$

Igualando a cero cada derivada parcial y resolviendo el sistema para *x* y para *y*, tendremos que $x = 14$, $y = 7$, por lo que $(14, 7)$. De acuerdo con el criterio de la segunda derivada tenemos,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -6 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial xy} = 2$$

$$D = (-2)(-6) - (2)^2 = 8 \;\; > 0 \;\text{ es un punto extremo}$$

La derivada $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} < 0$, el punto extremo (14, 7) es un máximo restringido.

Muchos casos en la Economía requieren optimizar una función sujeta a restricciones, que podrían ser presupuestales, tecnológicas, etc. En primer lugar, es necesario establecer con precisión cual es la función objetivo a optimizar, máximo o mínimo, y después las restricciones que impone el problema. Algunas de estas aplicaciones podrían ser.

a) Maximización del beneficio, sujeto a restricciones de presupuesto.
b) En el mismo sentido, la maximización de la producción, con la restricción de presupuesto y/o tecnológica, normalmente una empresa no cuenta con la infraestructura suficiente para producir cualquier cantidad de producto.
c) Minimizar los costos de producción, con una restricción que puede ser de mano de obra, capital, capacidad de producción, restricción de la demanda, entre otras posibles.

Ejemplo. Una fábrica produce dos tipos de maquinaria pesada en cantidades x e y. La función de costo conjunto está dada por

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$$

Para minimizar el costo, ¿cuántas máquinas de cada tipo debe producir, si el total debe ser de 8 máquinas?

La restricción es $x + y = 8$ y la función objetivo es

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - xy - \lambda(x + y - 8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - y - \lambda \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 4y - x - \lambda \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x + y - 8)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 4 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial xy} = -1$$

$$D = (2)(4) - (-1)^2 = 7 \ > 0 \ \text{es un punto extremo}$$

Igualando a cero cada una de las derivadas parciales y resolviendo las ecuaciones simultáneas para x e y, se obtiene $x = 5, y = 3$, y como la derivada $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} > 0$, el punto extremo (5, 3) es mínimo. Entonces, respetando la restricción de producir un total de 8 máquinas, la combinación menos costosa es producir 5 máquinas de tipo x, y 3 máquinas de tipo y.

Ejemplo. Suponga que con l unidades de trabajo y k unidades de capital, una empresa puede producir $q(l,k) = 16\, l^{3/4}\, k^{1/4}$ unidades de un producto. Si el costo de cada unidad de trabajo es de \$20, el de capital es *\$50* y el presupuesto de producción es de *\$10,000*, ¿Cuántas unidades de trabajo y de capital son necesarias para maximizar la producción?

La función de costo de l unidades de trabajo y k unidades de capital, con un presupuesto de 10,000 pesos es,

$$20l + 50k = 10{,}000$$

Y si la función a optimizar es, $q(l,k) = 16l^{3/4}k^{1/4}$ la función de Lagrange queda.

$$Q(l,k,\lambda) = 16l^{3/4}k^{1/4} - \lambda(20l + 50k - 10000)$$

Con derivadas parciales

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = 12l^{-1/4}k^{1/4} - 20\lambda = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = 4l^{3/4}k^{-3/4} - 50\lambda = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 20l + 50k - 10000 = 0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial l^2} = -3l^{-5/4}k^{1/4}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2} = -3l^{3/4}k^{-7/4}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial l \partial k} = \frac{3}{l^{\frac{1}{4}}k^{\frac{3}{4}}}$$

Despejamos λ de las dos primeras ecuaciones

$$(1) \quad \frac{3}{5}l^{-1/4}k^{1/4} = \lambda$$

$$(2) \quad \frac{2}{25}l^{3/4}k^{-3/4} = \lambda$$

Al resolver nos queda

$$\frac{3}{5}\frac{k^{1/4}}{l^{1/4}} = \frac{2}{25}\frac{l^{3/4}}{k^{3/4}} \quad \Longrightarrow \quad 75\, k^{1/4}\, k^{3/4} = 10\, l^{1/4}\, l^{3/4}$$

$$75\, k = 10\, l$$

Sustituimos $k = \frac{2}{15}l$ en la restricción $20l + 50\frac{2}{15}l = 10000$ y al despejar $\frac{80}{3}l = 10000$.

Finalmente, $l = 375 \ \ y \ \ k = \frac{2}{15}(375) = 50$.

De esta manera la producción máxima se obtiene con 375 unidades de trabajo y 50 unidades de capital, las dos derivadas segundas son negativas.

Vamos a sustituir estos valores óptimos en la ecuación (1), así

$$\lambda = \frac{3}{5}l^{-1/4}k^{1/4} = \frac{3}{5}(375)^{-1/4}(50)^{1/4} \quad \therefore \quad \lambda \cong 0.36$$

El multiplicador lagrangiano se puede interpretar como la producción marginal del dinero. Es decir, si se incrementa el presupuesto en una unidad monetaria, se podrán producir 0.36 unidades de producto.

Por otro lado, si las derivadas $\frac{\partial Q}{\partial l}$ y $\frac{\partial Q}{\partial k}$ son las productividades marginales del trabajo y el capital,

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial l}}{\frac{\partial Q}{\partial k}} = \frac{12l^{-1/4}k^{1/4}}{4l^{3/4}k^{-3/4}} = \frac{3\ k^{3/4}k^{1/4}}{l^{3/4}l^{1/4}} = \frac{3\ k}{l} = \frac{3\ (50)}{(375)} = 0.4$$

> En Economía existe una ley que dice ***"Cuando el trabajo y el capital están en su nivel óptimo, la tasa de sus costos es igual a la tasa de sus productividades marginales"*.**

Ejemplo. **La relación entre las ventas S y las sumas gastadas en dos medios publicitarios está dada por**

$$\boldsymbol{s = \frac{200x}{5+x} + \frac{100y}{10+y}}$$

El presupuesto para la propaganda es de 25; determinar cómo debe repartirse éste entre los dos medios para maximizar la ganancia neta.

La restricción es $x + y = 25$ y la función objetivo a maximizar,

$$L(x, y, \lambda) = \left[\frac{200x}{5+x} + \frac{100y}{10+y}\right] - \lambda(x + y - 25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \left[\frac{(5+x)200 - 200x}{(5+x)^2}\right] - \lambda = \frac{1000}{(5+x)^2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \left[\frac{(10+y)100 - 100x}{(10+y)^2}\right] - \lambda = \frac{1000}{(10+y)^2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x - y + 25 = 0$$

Igualamos las dos primeras ecuaciones,

$$\frac{1000}{(5+x)^2} = \frac{1000}{(10+y)^2} \quad \rightarrow \quad (10+y)^2 = (5+x)^2$$

Sustituimos la tercera ecuación, en esta última igualdad $x + y = 25$

$$(10+y)^2 = (5 + 25 - y)^2$$

$$25 + 250 - 10y + 25^2 - 50y + y^2 = 100 + 20y + y^2$$

$$800 = 80y \qquad \therefore \quad y = 10 \quad x = 15; \ \lambda = \frac{5}{2}$$

Obtenemos las segundas derivadas y sustituimos el valor extremo, (15,10)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 200(-2)(5+x)^{-3} = -0.05; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 200(-2)(5+y)^{-3} = -0.118; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial xy} = 0$$

$D = (-0.05)(-0.118) - (0)^2 = 0.006 \ > 0$ es un punto extremo, máximo $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} < 0$

Por lo tanto, para maximizar la ganancia se requiere $x = 15 \ y = 10$.

***Ejemplo*. La función de utilidad de una empresa que elabora dos productos está dada por $U(x, y) = x^2 y$, donde x e y son las cantidades de producto X e Y adquiridas. El precio de una unidad de X es de 2 unidades monetaria y el de una unidad de Y es de 3. Encuentre las cantidades de cada producto que deberá adquirir el consumidor a fin de maximizar su utilidad de consumo con un presupuesto de 30 unidades monetarias.**

Se trata de un problema de maximización. Donde la función objetivo es $\boldsymbol{U(x, y) = x^2 y}$. Y la restricción, presupuestal está dada por la función. $2x + 3y = 30$, así el problema de optimización queda,

$$Maximizar \ U(x, y) = x^2 y$$
$$s.a \ \ 2x + 3y = 30$$

De esta manera la ecuación de Lagrange quedaría,

$$L(x, y, \lambda) = x^2 y - \lambda(2x + 3y - 30)$$

Encontramos los puntos críticos

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2xy - 2\lambda$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = x^2 - 3\lambda$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x - 3y + 30$$

Despejamos el valor de λ en las dos primeras ecuaciones e igualamos las ecuaciones nos queda,

$$\begin{matrix} \lambda = xy \\ \lambda = \dfrac{x^2}{3} \end{matrix} \ \rightarrow \ xy = \frac{x^2}{3} \ \rightarrow \ x\left(y - \frac{x}{3}\right) = 0$$

Los valores que resuelven esta ecuación son; $x = 0$ ó $y = \frac{x}{3}$. Sustituimos en la tercera ecuación para encontrar los puntos críticos y tenemos para $x = 0$ obtenemos $y = 10$ y para $y = \frac{x}{3}$ sustituimos en la tercera ecuación $2x + 3\left(\frac{x}{3}\right) = 30$ de donde $x = 10$. De esta manera los puntos críticos son $(0,10\ )\ \ y\ \ \ (10, \frac{10}{3})$.

Para demostrar su naturaleza aplicamos el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2y \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial xy} = 2x$$

Para los dos puntos críticos, $(0,10\ )\ \ y\ \ \ (10, \frac{10}{3})$ el valor $D\ \ <=\ \ 0$

Así, para evaluar cuál de los dos es el máximo, sustituimos los dos puntos en la función de utilidad

$$U(0,10) = 0(10) = 0$$

$$U\left(10, \frac{10}{3}\right) = 100\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{1000}{3} \qquad es\ el\ valor\ máximo$$

En conclusión, para un consumo de 10 unidades del producto X y ${}^{10}/_{3}$ unidades del producto Y se consigue la máxima satisfacción del cliente que tiene un presupuesto de 30um.

Máximos y mínimos por medio del determinante hessiano.

Es una matriz conformada por derivadas de segundo grado. Esta matriz es utilizada para testear máximos o mínimos en funciones con n variables. Para el caso de tres variables, el determinante hessiano será el siguiente,

$$H(x,y,z) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

A partir de este determinante encontramos tres determinantes menores,

$$d_1 = f_{xx} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{yx}\right)^2 \quad y$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} = [f_{xx}f_{yy}f_{zz} + 2f_{yx}f_{zy}f_{xz}] - \left[(f_{yz})^2 f_{xx} + (f_{xz})^2 f_{yy} + (f_{xy})^2 f_{zz}\right]$$

A partir de los resultados de estos valores d_1, d_2, d_3 evaluados en cada punto crítico tendremos,

a) El punto crítico será un mínimo si d_1, d_2, d_3 son todos positivos.
b) Si los valores de d_1, d_2, d_3, tienen signo alterno, iniciando con negativo, entonces la función tiene un máximo en el punto crítico
c) Cualquier otro caso nos indicará que no hay información o el criterio no es concluyente.

En el caso de una matriz con restricciones, para estimar el comportamiento de $L(x, y, \lambda)$, se deberá determinar la matriz hessiana acotada siguiente,

$$H_B = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = 2(g_x g_y L_{xy}) - ({g_x}^2 L_{yy} + {g_y}^2 L_{xx})$$

g_x Representa la derivada de la restricción con respecto a la variable x
g_y Representa la derivada de la restricción con respecto a la variable y

Las condiciones para un punto extremo son las siguientes,

a) Existe un máximo relativo si $|H_B| > 0$ y
b) Es un mínimo relativo si $|H_B| < 0$

Ejemplo. Una empresa productora de materias primas tiene la siguiente función de producción.

$$f(x, y) = 100\, x^{\frac{3}{4}}\, y^{\frac{1}{4}}$$

Donde x representa las unidades de trabajo a \$150 pesos por unidad e y representa las unidades de capital a \$250 pesos por unidad. El costo total de trabajo y capital está limitado a \$50,000. Hallar el nivel máximo de producción.

La restricción es $150x + 250y = 50{,}000$ y la función objetivo es

$$L(x, y, \lambda) = 100\, x^{\frac{3}{4}}\, y^{\frac{1}{4}} - \lambda(150x + 250y - 50000)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 75x^{-\frac{1}{4}}\,y^{\frac{1}{4}} - 150\lambda \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 25\,x^{\frac{3}{4}}\,y^{-\frac{3}{4}} - 250\lambda \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 150x + 250y - 50000$$

Despejamos λ en la primera ecuación $\lambda = \frac{x^{-\frac{1}{4}}\,y^{\frac{1}{4}}}{2}$, sustituimos este valor en la segunda ecuación nos queda

$$25x^{\frac{3}{4}}\,y^{-\frac{3}{4}} - 250\lambda = 0 \;\rightarrow\; 25x^{\frac{3}{4}}\,y^{-\frac{3}{4}} - 250\left(\frac{x^{-\frac{1}{4}}\,y^{\frac{1}{4}}}{2}\right) = 0 \;\rightarrow\; x = 5y$$

Sustituimos en la tercera ecuación, obtenemos

$$150(5y) + 250y - 50000 \;\rightarrow\; y = 50 \;\; y \;\; x = 250$$

Obtenemos las segundas derivadas y sustituimos el valor extremo,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -75\frac{y^{\frac{1}{4}}}{4x^{\frac{5}{4}}} = -0.05 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{-75}{4}\left(\frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{7}{4}}}\right) = -1.25 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial xy} = \frac{75}{4}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}}\right) = 0.25$$

Construimos el hessiano

$$H_B = \begin{vmatrix} 0 & L_{\lambda_x} & L_{\lambda_y} \\ L_{\lambda_x} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{\lambda_y} & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 150 & 250 \\ 150 & -0.05 & 0.25 \\ 250 & 0.25 & -1.25 \end{vmatrix}$$

De esta manera

$$|H_B| = 2(150)(250)(0.25) - 150^2(-1.25) - 250^2(-0.05) = 50{,}000$$

Por lo tanto, el nivel máximo de producción para 250 unidades de trabajo y 50 de capital es.

$f(250{,}50) = 100(250)^{\frac{3}{4}}(50)^{\frac{1}{4}} = 16{,}719$ Unidades de producción

Cuando se trata de una función de producción, el multiplicador λ es la productividad marginal del capital, para este ejemplo es $\lambda = \frac{x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{2} = 0.334$.

Método de Lagrange con dos restricciones

Supongamos que tenemos dos restricciones y queremos hallar los valores máximo y mínimo. Esto significa que buscamos los valores extremos cuando de una función $f(x, y, z)$

en un punto (x, y, z). Este punto está sobre la intersección de las curvas de nivel con restricciones $g(x, y, z)$ y $h(x, y, z)$. El método de multiplicadores de Lagrange se puede extender a un problema de optimización de más de dos variables. En este caso podemos generalizar el problema a,

$$\begin{aligned} &\text{Función objetivo a optimizar } f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \\ &s.a \quad g(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \\ &\qquad h(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \end{aligned}$$

La función de Lagrange sería entonces de la forma,

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) - \lambda_1 g(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) - \lambda_2 g(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$$

El proceso para encontrar los puntos críticos sería el mismo que hemos visto hasta ahora. La complejidad está en resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, que sería más simple utilizando algebra de matrices.

Asimismo, el método de Lagrange puede extenderse al caso de una función de n variables y k restricciones. En este caso la función de Lagrange tendría la forma

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i\,(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$$

Ejemplo. Supongamos la función $f(x, y, z) = x + 2yz$ sujeta a las restricciones $y + z = 4$ y $x + y = 2$

La función de Lagrange sería entonces,

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + 2yz - \lambda_1(y + z - 4) - \lambda_2(x + y - 2)$$

Obtenemos sus derivadas y puntos críticos.

$$\begin{aligned} L_x &= 1 - \lambda_2 = 0 \\ L_y &= 2z - \lambda_1 - \lambda_1 = 0 \\ L_z &= 2y - \lambda_1 \\ L_{\lambda_1} &= -y - z + 4 \\ L_{\lambda_2} &= -x - y + 2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_2 &= 1 \\ z &= \frac{\lambda_1 + 1}{2} \\ y &= \frac{\lambda_1}{2} \end{aligned}$$

Sustituimos en la cuarta y quinta ecuación

$$\begin{matrix} \dfrac{\lambda_1}{2}+\dfrac{\lambda_1+1}{2}-4=0 \\ x+\dfrac{\lambda_1}{2}-2=0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \dfrac{2\lambda_1+1}{2}=4 \\ x=2-\dfrac{\lambda_1}{2} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1=\dfrac{7}{2} \\ x=2-\dfrac{7/2}{2}=\dfrac{1}{4} \end{matrix}$$

Sustituimos nuevamente en

$$\rightarrow \quad \begin{matrix} z=\dfrac{\lambda_1+1}{2} \\ y=\dfrac{\lambda_1}{2} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} z=\dfrac{9}{4} \\ y=\dfrac{7}{4} \end{matrix}$$

Finalmente, el único punto crítico del problema es $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right)$

Demostrar que este punto es un máximo o un mínimo se requiere un paso adicional que es utilizar el llamado "Hessiano orlado". Para este ejercicio, el hessiano orlado sería,

$$H(x,y,z)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & L_{\lambda_1 x} & L_{\lambda_1 y} & L_{\lambda_1 z} \\ 0 & 0 & L_{\lambda_2 x} & L_{\lambda_2 y} & L_{\lambda_2 z} \\ L_{\lambda_1 x} & L_{\lambda_2 x} & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{\lambda_1 y} & L_{\lambda_2 y} & L_{yy} & L_{yx} & L_{yz} \\ L_{\lambda_1 z} & L_{\lambda_2 z} & L_{zz} & L_{zx} & L_{zy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-4$$

El punto crítico $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right)$ es un mínimo.

Funciones con desigualdades.

Algunos problemas económicos requieren condiciones de desigualdades, por ejemplo, cuando se desea maximizar la utilidad sujeta a un presupuesto o minimizar costos a partir de producir menos. En estas condiciones se utiliza como una alternativa la programación restringida, llamada así por la forma de sus restricciones de desigualdad

Normalmente, el problema de optimización se establece en el formato de problema de maximización, no obstante, un problema de minimización de una función se modifica a otro equivalente de maximización si multiplicamos por menos uno.

El método se basa en considerar la desigualdad como una igualdad y si obtenemos el máximo en la forma usual una función de Lagrange; si $\lambda > 0$ este máximo es también el máximo sometido a la restricción de igualdad; si $\lambda \leq 0$ el máximo considerado sin considerar la restricción satisface la restricción y por lo tanto es también el máximo con restricción. Para el caso de minimización se pueden hacer consideraciones similares.

El procedimiento general para resolver este problema de maximización o minimización, parte de las condiciones de Kuhn-Tucker. Así, un punto extremo (x, y) es un máximo local de $f(x, y)$ con una restricción $g(x, y) \leq 0$ solamente si existe una λ no negativa tal que λ y (x, y) satisfacen las siguientes condiciones,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0$$
$$\lambda g(x,y) = 0$$
$$g(x,y) \leq 0$$

Como en el caso anterior, los pasos para resolver un problema de optimización con restricciones de desigualdad son los siguientes,

1) Construir la función lagrangiana siguiente,
$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$
2) Igualar a cero las derivadas parciales,
$$L_x(x,y) = f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0$$
$$L_y(x,y) = f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0$$
$$L_\lambda(x,y) = -\lambda g_x(x,y) = 0$$
3) Aumentar con la condición de holgura complementaria
$$\lambda \leq 0 \quad y$$
$$\lambda = 0 \quad si\ g(x,y) < 0$$

4) Encontrar los valores de (x, y) que satisfacen la condición
$$g(x,y) \leq 0$$

Bibliografía.

Aryna, J. C., Lardner R.W., MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ADMINISTRACIÓN Y A LA ECONOMÍA. Ed. Prentice Hall, México, 2009.

Draper, J.E., Klingman J.S., MATEMÁTICAS PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMIA, Ed. Harla. México, 1976.

Sydsaeter K., Hammond P.J., MATEMÁTICAS PARA EL ANALISIS ECONOMICO. Ed. Prentice Hall, México, 1998.

Tabla de fórmulas de derivación

Derivadas de funciones elementales	***Derivada***

Si $\boldsymbol{k}$ es una constante y $\boldsymbol{x}$ una variable cualquiera

$\boldsymbol{f(x) = k}$	$f'(x) = 0$
$\boldsymbol{f(x) = x}$	$f'(x) = 1$
$\boldsymbol{f(x) = x^n \quad donde\ n} \in \mathbb{N}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^n} \quad donde\ n} \in \mathbb{N}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\boldsymbol{f(x) = \ln(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$\boldsymbol{f(x) = e^x}$	$f'(x) = e^x$

Reglas de derivación	***Derivada***
De la suma $\boldsymbol{F(x) = f(x) + g(x)}$	$F'(x) = f'(x) + g'(x)$
Producto por un escalar $\boldsymbol{f(x) = kx^n \quad donde\ n} \in \mathbb{N}$	$f'(x) = knx^{n-1}$
Producto de dos funciones $\boldsymbol{F(x) = f(x)g(x)}$	$\big(f(x)g(x)\big)' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
Inversa de una función $\left(\boldsymbol{\frac{1}{f(x)}}\right)$	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f(x)'}{f(x)^2}$
Derivada del cociente $\left(\boldsymbol{\frac{f(x)}{g(x)}}\right)$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Regla generalizada de la potencia $([\boldsymbol{g(x)}]^{\boldsymbol{r}})$	$([\boldsymbol{g(x)}]^{\boldsymbol{r}})' = \boldsymbol{r} \cdot [\boldsymbol{g(x)}]^{\boldsymbol{r-1}} \cdot [\boldsymbol{g(x)}]'$
Derivada de una raíz	$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = -\frac{f(x)'}{2\sqrt{f(x)}}$

Derivada del logaritmo natural	$(\ln g(x))' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$
Derivada del logaritmo base a	$(\log_a g(x))' = \dfrac{g'(x)}{g(x)} \dfrac{1}{ln\, a}$
Derivada de la función exponencial	$(e^x)' = e^x$ $(b^x)' = b^x \ln{(b)}$ $\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} g(x)'$