Capítulo 5.

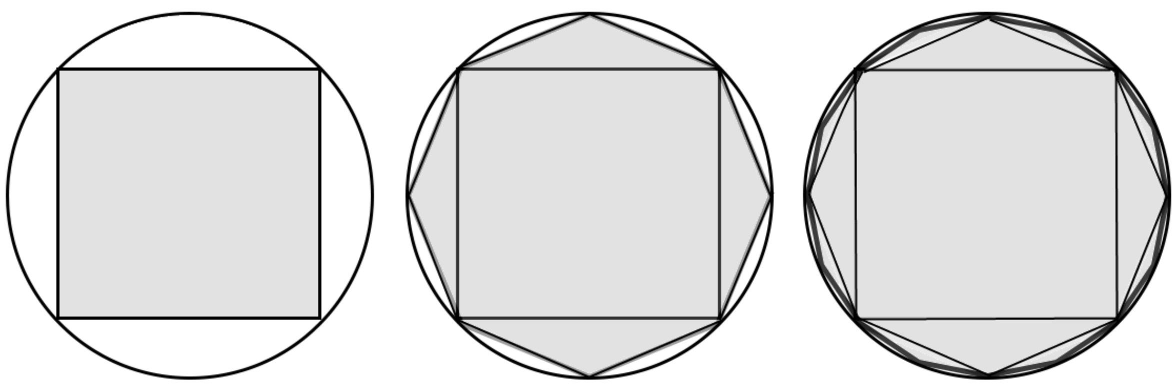
Cálculo integral.

“Dados dos círculos con el mismo centro, inscribir en el círculo mayor un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque el círculo menor.”
PROPOSICIÓN 16 LIBRO XII, libro ***los Elementos*** *de Euclides.*

5.1 Antecedentes

Los antecedentes del Cálculo Integral se remontan a los años 360 A.C. y se deben al matemático griego Eudoxo[1], quien invento un método llamado “Método de exhaución”[2]. Este procedimiento fue posteriormente perfeccionado por Arquímedes y servía para encontrar áreas de figuras planas, o de regiones concretas, como círculos y elipses. El método consistía en encerrar un polígono en el área a calcular. A medida que se aumentan los lados del polígono se delimita más claramente el área de interés.

Gráfica 5.1 calcular el área de un círculo,



Para encontrar el área, se van a ir inscribiendo polígonos de 2^{n} lados, iniciamos con $n = 2,3,..$ En la imagen de la izquierda, cuando $n = 2$, se forma un rectángulo que nos da la primera aproximación del área total. Como segundo paso, añadimos un polígono de *8* lados, trazando triángulos rectángulos en cada lado del cuadrado. De esta manera al área del cuadrado le sumamos los 8 triángulos. Finalmente, en la última imagen, repetimos el proceso, inscribimos un polígono de $2^4 = 16$ lados y ahora sumamos el área de *16* triángulos. Como podemos observar mientras más lados consideremos en el polígono más exacto es el cálculo del área y en cada paso aprovechamos el resultado del cálculo anterior.

---

[1] Eudoxo de Cnido, Matemático de la antigua Grecia, nacido en Cnido hoy Turquía, nació alrededor del 408 AC y murió en su ciudad natal el 355 AC. Considerado el padre de la astronomía matemática. Es considerado uno de los mejores matemáticos del período clásico solo superado por Arquimides.

[2] Miguel Díaz Cárdenas,” El método de exhaución”, Revista Alternativa. Número 19. (enero-junio 2009), Unidad Académica de Matemáticas Universidad Autónoma de Guerrero. México. http://www.revistaalternativa.org/numeros/no19/mdiaz19.pdf

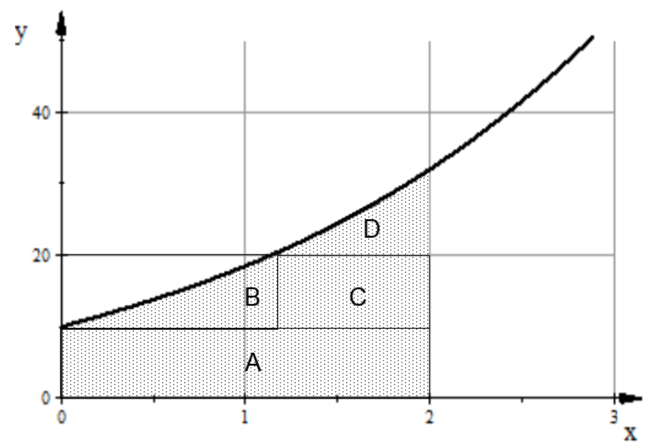
El desarrollo del cálculo integral en su versión moderna inicia en el siglo XVII, con los aportes de Newton y Leibniz. Ellos introdujeron el concepto de integración que está estrechamente relacionado con el cálculo diferencial. Si bien a ciencia cierta no se sabe quién fue el que hizo los primeros desarrollos. Incluso hoy en día hay controversia sobre quién tiene la paternidad Leibniz o Newton. La verdad probablemente nunca se sabrá y de todos modos no creo que importe. Sin embargo; una cosa es cierta, la notación que se usa hasta nuestros días es la que propuso Leibniz, eso debe tener algún peso.

Definiciones y notación.

El cálculo diferencial es útil para medir y estudiar tasas de cambio en términos de las pendientes de la función, mientras que el cálculo integral se ocupa de determinar las áreas que se encuentran entre curvas y otras fronteras. Ambos conceptos, pendiente y área, se pueden calcular por principios geométricos. Ya hemos visto como los griegos estudiaron y resolvieron estos problemas en casos especiales; sin embargo, fue hasta el siglo XVII que se encontró una conexión entre la derivación y la integración.

De hecho, para calcular el área de una figura geométrica plana, podemos utilizar otras formas conocidas, similar al método de Eudoxo. Por ejemplo, para encontrar el área 'aproximada' de la siguiente función,

Gráfica 5.2 calcular el área de un figura geométrica plana,



Para encontrar el área achurada, gráfica 5.2, podríamos inscribir cuatro figuras geométricas, dos rectángulos y dos triángulos, el área de estas figuras serían,

$$A = 2 * 10 = 20; \qquad C = 0.86 * 10 = 8.6 \ \acute{a}reas\ de\ los\ rect\acute{a}ngulos$$

$$B = \frac{1.14 * 10}{2} = 5.7; \quad D = \frac{0.86 * 10}{2} = 4.3 \ \acute{a}reas\ de\ los\ tri\acute{a}ngulos$$

$$\acute{A}rea\ total = A + B + C + D = 38.6$$

Por supuesto que tendríamos un margen de error, que para reducirlos tendríamos que considerar más figuras geométricas que completen los espacios vacíos.

Para reducir el error y facilitar el cálculo, sobre todo de funciones complejas, utilizamos mejor el cálculo integral.

Ya hemos visto técnicas para encontrar la derivada $F'(x)$ de una función $f(x)$. En muchas ocasiones es necesario proceder al revés. Se trata de encontrar $f(x)$ a partir de la derivada $F'(x)$. Este procedimiento se llama *antiderivación.* Por otro lado, el proceso de integración puede ser definido como el límite de la suma de términos, cada uno correspondiente a la superficie de una tira delgada subtendido por la gráfica de la función. Definido de esta manera, la integración ofrece un medio eficaz para calcular el área bajo una curva y el área y volumen de sólidos, tales como la esfera o un cono.

De acuerdo con lo anterior, la integración podemos estudiarla desde dos puntos de vista, que son complementarios.

1) La antiderivada, para encontrar la función primitiva de la derivada de una función. (Integral indefinida)
2) Como el procedimiento para encontrar el área bajo la curva. (integral definida)

5.2 Antiderivada y funciones primitivas.

El teorema fundamental del cálculo establece que la integración y la derivación son operaciones inversas. Es decir, al integrar una función $f'(x)$ obtenemos la función original, o primitiva, $F(x)$. Si lo vemos desde el punto de vista de la Economía, la integral de una función marginal es igual a la función original. Como veremos más adelante; la integral de la función de ingreso marginal es igual a la función de ingreso.

Supongamos que $f(x)$ es una función cualquiera y que $F(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$, esto es, $F'(x) = f(x)$. Llamamos a $F(x)$ como la antiderivada de $f(x)$.

Ejemplos: Encuentre la antiderivada de las siguientes funciones.

- $f'(x) = 2x$, la antiderivada es $F(x) = x^2$, entonces F es una función primitiva de f
- $f'(x) = \frac{1}{x^5} + 3x^2$
  Primero rescribimos $f'(x) = x^{-5} + 3x^2$, la función primitiva $F(x) = -\frac{1}{4}x^{-4} + x^3$

Existen diferentes funciones que resultan de la misma derivada. Si modificamos un poco la función primitiva del ejercicio anterior.

$F(x) = x^2 + 5$, o bien
$F(x) = x^2 - 8$, o en forma general cualquiera de la forma
$F(x) = x^2 + c$,

La derivada sigue siendo la misma. El valor de c es una constante llamada, constante de integración.

Ejemplos: Encuentre la antiderivada y determine la función primitiva.

a) Si $f'(x) = 2x$, suponga que un punto de la función $F(x)$ es (2,8).

   Solución, La antiderivada por tanteo es $F(x) = x^2 + c$, para encontrar la función primitiva debemos encontrar el valor de la constante c. Sustituimos en punto (2,8) en la función primitiva.

   $F(x) = x^2 + c$ Para $(x = 2, F(x) = 8)$ es $8 = 2^2 + c$ de donde y $c = 4$

   Por lo tanto, la función primitiva específica es $F(x) = x^2 + 4$

b) La función de ingreso marginal de una empresa es $r'(x) = 12 - 0.025x^2$. Si el ingreso total es de cero cuando no se vende ninguna unidad ¿cuál es la función de ingreso total del producto?

   Solución, La función de ingreso total es

$$R(x) = 12x - \frac{0.025}{3}x^3 + c$$

   Por otro lado, si no hay ventas el ingreso es cero; si $x = 0$, $R(x) = 0$, sustituimos en la ecuación anterior, nos queda

$$0 = 12(0) - \frac{0.025(0)^3}{3} + c \quad \therefore \quad c = 0$$

   Finalmente $R(x) = 12x - \frac{0.025}{3}x^3$

c) Si se sabe que la función de costo marginal para la elaboración de un producto es $c'(x) = 4x + 10.3$ y el costo total cuando se fabrican 20 unidades es de \$15,400 pesos. Determine la función de costo total.

   La antiderivada, por tanteo es

$$C(x) = 2x^2 + 10.3x + c$$

   Si $x = 20$ y $C(20) = 15{,}400$, sustituimos estos valores en la ecuación anterior

$$15{,}400 = 2(20^2) + 10.3(20) + c \quad \therefore \quad c = 15400 - 800 - 206 = 14{,}394$$

   La función de costo total será entonces, $C(x) = 2x^2 + 10.3x + 14{,}394$

5.3 *Integral indefinida o Cálculo de primitivas.*

La simbología utilizada para expresar el cálculo de primitivas es,

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

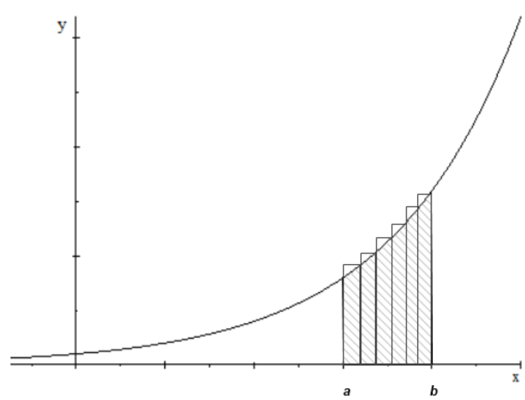
El símbolo $\int$ es el signo de integral y dx indica la variable de integración. La notación completa $\int f(x)\,dx$ se lama *Integral indefinida*.

Siempre se escribe la variable de interés en esta expresión, si la variable de interés es t, en lugar de x, tendríamos que escribir $\int f(t)\,dt$. Esta simbología fue introducida por Leibniz (1646-1716)[3].

Llamamos *integral indefinida* de una función $f'(x)$ a la familia de antiderivadas, o de primitivas, de la función $F(x)$. Por otro lado, *la integral definida* está relacionada con encontrar el área bajo una curva, en esencia como lo hace el método de exhaución, aunque expresado en notación de Leibniz. Es decir, dada una función $f(x)$ buscamos encontrar el área bajo la curva en un intervalo dado $[a, b]$, en forma gráfica equivale a,

La integral definida relaciona entonces dos conceptos; el área bajo la curva de una función $f(x)$ y la antiderivada, su estudio lo veremos más adelante.

Utilizando la notación adecuada de integración, los ejercicios anteriores, los rescribimos de la siguiente manera.



[3] "De acuerdo con los cuadernos de Leibniz, el 11 de noviembre de 1675 tuvo lugar un acontecimiento fundamental, ese día empleó por primera vez el cálculo integral para encontrar el área bajo la curva de una función $y = f(x)$. Leibniz introdujo varias notaciones usadas en la actualidad, tal como, por ejemplo, el signo "integral" ∫, que representa una S alargada, derivado del latín "summa", y la letra "d" para referirse a los "diferenciales", del latín "differentia". Esta ingeniosa y sugerente notación para el cálculo es probablemente su legado matemático más perdurable." Leibniz paso gran parte de su vida en disputa con newton y otros por la paternidad del cálculo; hoy en día se emplea la notación de Leibniz y no la de Newton. Tomado de *http://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz*

- $\int 2x\,dx = x^2 + c$ de la misma manera
- $\int (\frac{1}{x^5} + 2x^2)\,dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + x^3 + c$

Ejemplo. La función de costo marginal de una organización de productores artesanales es $0.45x^2 - 2x + 30$, donde x es el número de artículos producidos en un día. Los costos fijos son de $ 350 pesos por día.

a) Encontrar el costo total de producción por día.
b) Si el nivel de producción es de $x = 20$. Determine el costo si la producción aumenta a $x = 40$ unidades.

Solución,

a) Sea $C(x)$ el costo de producir x unidades por día. La derivada es el costo marginal $c'(x)$, así para encontrar la función primitiva de costo total.

$$C(x) = \int (0.45x^2 - 2x + 30)dx = \frac{0.45}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 + 30x + c$$
$$= 0.15x^3 - x^2 + 30x + c$$

Los costos fijos de $\$\,350$ pesos se utilizan, incluso si se producen cero artículos, $x = 0$, esto es $C(0) = 350$. Así, para encontrar la constante de integración c.

$$350 = 0.15(0)^3 - (0)^2 + 30(0) + c \quad \therefore \quad c = 350$$

La función de costo total será entonces,

$$C(x) = 0.15x^3 - x^2 + 30x + 350$$

b) El costo cuando $x = 20$ es $C(20)$, y cuando $x = 40$, el costo es de $C(40)$, el incremento en el costo será entonces la diferencia entre $C(40) - C(20)$

$$C(40) = 0.15(40)^3 - (40)^2 + 30(40) + 350 = 9550$$
$$C(20) = 0.15(20)^3 - (20)^2 + 30(20) + 350 = 1750$$

El incremento en el costo es $C(40) - C(20) = \$7{,}800$

5.4 Reglas básicas de integración.

En una gran cantidad de casos no es necesario encontrar la antiderivada por tanteo. Como en las derivadas, existen reglas de integración que nos permiten calcular una integral elemental de manera directa. Por supuesto que en muchos casos se requiere aplicar otras técnicas, que veremos más adelante, y en otros simplemente no es posible su solución.

Estas últimas se resuelven por medio de métodos numéricos y si es posible con el apoyo de computadoras, estas técnicas no se incluyen en este libro.

Las reglas más usuales para calcular la integral de funciones elementales son las siguientes.

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y k una constante

1) Regla de la función constante

$$\int k\,dx = kx + c$$

2) Regla de la potencia

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad para\, n \neq -1$$

3) La integral del producto de una constante por una función es el producto de la constante por la integral de la función. Si k es una constante

$$\int kx^n\,dx = k\int x^n\,dx = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + c \qquad para\, n \neq -1$$

Ejemplos:

a) $\int 2\,dx = 2x + c$

b) $\int -5\,dx = -5x + c$

c) $\int \frac{3}{2}dx = \frac{3}{2}x + c$

d) $\int 4x\,dx = 4\int x\,dx = \frac{4x^2}{2} + c$

e) $\int \frac{3}{5}x^3\,dx = \frac{3}{5}\int x^3\,dx = \frac{3}{5}\frac{x^4}{(4)} + c = \frac{3x^4}{20} + c$

f) $\int 5\sqrt{x}\,dx = 5\int \sqrt{x}\,dx = 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{5x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c = \frac{10}{3}x\sqrt{x} + c$

g) $\int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{{}^{1}/_{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{{}^{4}/_{3}} + c = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + c$

h) $\int 4\,x^3dx = 4\int x^3\,dx = x^4 + c$

i) $\int \frac{5}{\sqrt{x}}dx = 5\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 5\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-{}^{1}/_{2}+1}\right) + c = 5\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{{}^{1}/_{2}}\right) + c = 10\sqrt{x}$ +c

4) Linealidad. La integral de la suma o diferencia de funciones es la suma o diferencia de las integrales de las funciones. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones integrables.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx + c$$

Ejemplos:

a) $\int (2x^3 - x^2 - 4)dx = 2\int x^3\,dx - \int x^2\,dx - \int 4\,dx$

$$= 2\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x + c = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x + c$$

b) $\int (\frac{x}{3} + \frac{1}{2})dx = \frac{1}{3}\int x\,dx + \int \frac{1}{2}dx = \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + c = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{2} + c = \frac{1}{6}x(x+3) + c$

c) $\int (\frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}\,)dx = \int \frac{2}{\sqrt{x}}dx - \int 3\sqrt{x}\;dx = 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx =$

$$= 4\sqrt{x} - 3\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = 2\sqrt{x}(2-x) + c$$

d) La función de ingreso marginal de una empresa es $I'(x) = 2050 - 18x - 4x^2$. Determinar la función de demanda, el valor de la constante c se determina bajo el supuesto de ingreso cero.

La función de ingreso es,

$I(x) = \int (2050 - 18x - 4x^2)dx = \int 2050\,dx - \int 18x\,dx \int 4x^2dx$

$= 2050x - \frac{18}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + c = 2050x - 9x^2 - \frac{4}{3}x^3 + c$

Suponiendo que no se ha vendido ninguna unidad, el ingreso total es cero.

$0 = 2050(0) - 9(0)^2 - \frac{4}{3}(0) + c \quad\quad por\ lo\ tanto\quad c = 0$

Al sustituir en la función de ingreso tenemos,

$$I(x) = 2050x - 9x^2 - \frac{4}{3}x^3$$

Como el ingreso es $I = x\,D$ despejamos y la función de demanda es

$$D(x) = \frac{I(x)}{x} = 2050 - 9x - \frac{4}{3}x^2$$

5) Regla del logaritmo. Excepción de la regla de la potencia.

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c \qquad\qquad x \neq 0$$

6) Función exponencial.

$$\int e^x dx = e^x + c$$

7) $\int [\boldsymbol{f(x)}]^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f'(x)dx} = \frac{[\boldsymbol{f(x)}]^{\boldsymbol{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$

Ejemplos:

a) $\int (5x-3)^3 dx$

En este caso $f(x) = 5x - 3$ y $f'(x) = 5$, para aplicar la regla 7 modificamos la integral, multiplicamos y dividimos por el mismo valor, en nuestro ejemplo 5. No se altera el resultado y podemos aplicar la regla.

$$\frac{1}{\mathbf{5}}\int (5x-3)^3\, \mathbf{5}dx = \frac{1}{5}\frac{(5x-3)^4}{4} + c = \frac{(5x-3)^4}{20} + c$$

b) $\int \sqrt{2x+6}\, dx$

Hacemos $f(x) = 2x + 6$ y $f'(x) = 2$, modificamos la integral

$$\frac{1}{\mathbf{2}}\int (2x+6)^{\frac{1}{2}}\, \mathbf{2}dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+6)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{(2x+6)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

c) $\int \frac{3}{(6x+5)^4} dx$

Hacemos la transformación,

$3\int (6x+5)^{-4} dx$ y $f(x) = (6x+5)$, $f'(x) = 6$ efectuamos la modificación y,

$$\frac{3}{6}\int (6x+5)^{-4}\, 6dx = \frac{3}{6}\frac{(6x+5)^{-4+1}}{-3} + \mathrm{c} = -\frac{1}{6(6x+5)^3} + \mathrm{c}$$

8) $\int f'(x)e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$

Ejemplos:

a) $\int 3\, e^{\frac{t}{5}} dt$

Hacemos $f(t) = \frac{t}{5}$ y su derivada $f'(t) = \frac{1}{5}$, para aplicar regla 8, modificamos la integral,

$$3(5)\int e^{\frac{t}{5}} \left(\frac{1}{5}\right) dt = 15e^{\frac{t}{5}} + c$$

b) $\int 3x\, e^{x^2} dx$

La derivada de la función $f(x) = x^2$ y $f'(x) = 2x$, se modifica la integral,

$$\frac{3}{2}\int 2x\, e^{x^2} dx = \frac{3}{2}e^{x^2} + c$$

c) $\int 6x\, e^{3x^2+2}dx$

Calculamos la derivada de $f(x)3x^2 + 2$ y $f'(x) = 6x$, entonces

$$\int 6x\, e^{3x^2+2}dx = e^{3x^2+2} + c$$

d) $\int (5 - 3\, e^{-5t} + \frac{e^{2t}}{4})\, dt$

Se aplica la regla 4 y la regla 8.

$$\int (5 - 3\, e^{-5t} + \frac{e^{2t}}{4})\, dt = \int 5\, dx - 3 \int e^{-5t}\, dt + \frac{1}{4}\int e^{2t}\, dt$$

$$= 5t - 3 \int e^{-5t}\, dt + \frac{1}{4}\int e^{2t}\, dt = 5x + \frac{3}{5}\int e^{-5t}(-5)\, dt + \frac{1}{8}\int e^{2t}\, (2)\, dt$$

$$= 5t + \frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{1}{8}e^{2t} + c$$

e) $\int \frac{4}{e^{2x+3}}dx$

Si modificamos a $\int 4\, e^{-2x-3}dx$ entonces $f(x) = -2x - 3$ y $f'(x) = -2$, así

$$\frac{4}{-2}\int (-2)\, e^{-2x-3}dx = -2e^{-2x-3} + c$$

9) $\boldsymbol{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\, f(x) + c}$

Ejemplos:

a) $\int \frac{dx}{x+10}$

La función $f(x) = x + 10$ y $f'(x) = 1$, entonces

$$\int \frac{dx}{x+10} = \ln(x + 10) + c$$

b) $\int \frac{6x^2}{2x^3+5}dx$

Si tomamos $f(x) = 2x^3 + 5$, $f'(x) = 6x^2$ aplicamos regla 9

$$\int \frac{6x^2}{2x^3 + 5}dx = ln(2x^3 + 5) + c$$

c) $\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-5}dx$

Obtenemos la derivada de $f(x) = 3x^2 + 9x - 5$, $f'(x) = 6x + 9$ de tal manera que,

$$\frac{1}{3}\int \frac{3(2x + 3)}{3x^2 + 9x - 5}dx = \frac{1}{3}\ln(3x^2 + 9x - 5) + c$$

Ejercicios.

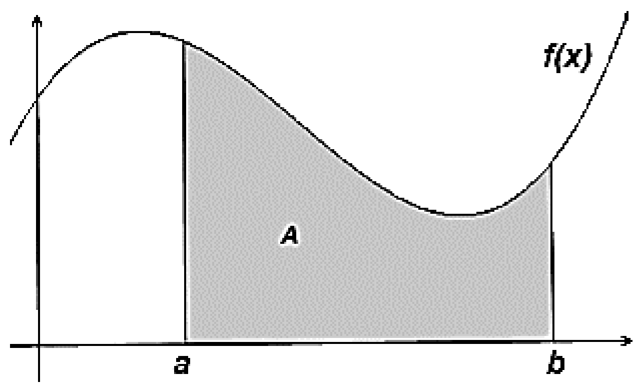
1. $\int (x^2+5)^6 \; 2x\,dx$
2. $\int \sqrt{2x^2+6} \; 2x\,dx$
3. $\int \frac{1}{(4-3t)^4}\,dt$
4. $\int 6e^{6x}\,dx$
5. $\int 6x\,e^{-x^2}\,dx$
6. $\int \left[\frac{\sqrt{x}}{8}-\frac{e^{2x}}{3}\right] dx$
7. $\int \left(4e^{2x+1}+3x^2-x^{3/4}\right) dx$
8. $\int \left(\frac{x^4}{2}+\frac{2}{x^4}-\frac{2}{x}\right) dx$
9. *El valor de los activos de un productor agrícola es de $\$3{,}500{,}000$ pesos y la tasa de cambio que le corresponde es de $\frac{dV}{dt}=8e^{0.05t}$, donde t es el tiempo en años que tienen los activos y V es el valor total.*
   a. Encuentre $V(t)$
   b. Determine el valor de los activos 20 años después.
10. *Suponga que el costo marginal para un producto está dado por $c'(x)=\frac{400}{2x+1}$, donde x es el número de unidades producidas.*
    a. Encuentre la función costo
    b. Si producir 5 unidades cuesta \$1980 pesos ¿cuál será el costo de producir 50 unidades?
11. *Una empresa que fabrica componentes electrónicos estima que el costo marginal de producir x reguladores de voltaje por día es de $0.12x+10$. Si los costos fijos por día son de \$1500 pesos. Encuentre el costo de fabricar x reguladores de voltaje por día.*
12. *La producción mensual de una empresa es $p(x)$. Suponga que la tasa de producción mensual es de $30+4x-\frac{1}{5}x^2$unidades por mes. Encuentre la producción mensual $p(x)$. (puede considerar la tasa de producción como $p'(x)$ y $p(0)=0$.*

5.5 Integral definida

La integral definida es un concepto utilizado para determinar áreas limitadas por curvas y rectas. Sea $f(x)$ una función derivable y continua en el intervalo $[a, b]$; y sea $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, se llama integral definida de la función entre los puntos a y b al área de la porción del plano que está limitada por la función, al número real A, que resulta de calcular.

$$A = \int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Gráfica 5.xx gráfica de una función en el intervalo $[a, b]$



El área comprendida entre la gráfica de una función continua positiva $f(x)$, el eje de las absisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a,

$$A = \int_a^b f(x)\ dx$$

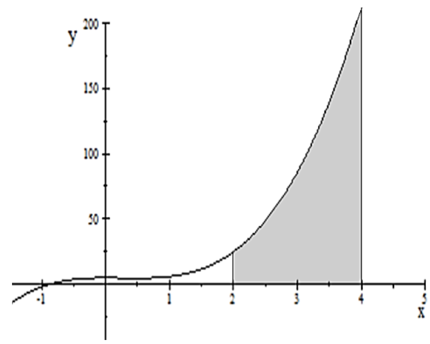
Los números a y b se llaman límites de integración, a es el límite inferior y b el límite superior, usualmente $a < b$

Para evaluar estas integrales realizamos dos pasos,

a) Obtenemos la integral utilizando las técnicas para evaluar integrales indefinidas y determinar antiderivadas, integrales infinitas. Estos métodos siguen siendo válidos para evaluar las integrales definidas
b) Se evalúa la integral indefinida para el límite superior de la integral y el resultado se resta del valor que resulte de la evaluación en el límite inferior. El resultado es un número que es el área bajo la curva. La constante de integración desaparece para este cálculo.

Ejemplos. Evaluar las siguientes integrales definidas.

a) $\int_2^4 (4x^3 - 3x^2 + 5)dx$



En primer lugar, resolvemos la integral indefinida, de acuerdo con la regla 4,

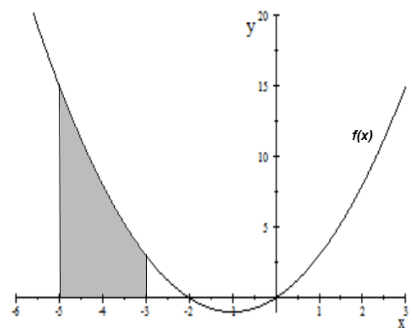
$\int_2^4 (4x^3 - 3x^2 + 5)dx = \int_2^4 4x^3 dx - \int_2^4 3x^2 dx + \int_2^4 5dx = (x^4 - x^3 + 5x)\Big|_2^4$

Evaluamos la integral definida de acuerdo con los límites de integración.

$= [4^4 - 4^2 + 5(4)] - [2^4 - 2^2 + 5(2)] = 212 - 18 = 194$

El área bajo la curva es 194.

b) $\int_{-5}^{-3} (x^2 + 2x)\, dx$

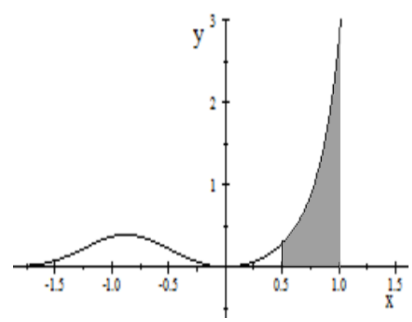


Aplicamos regla 4,

$\int_{-5}^{-3} (x^2 + 2x)\, dx = \int_{-5}^{-3} (x^2 + 2x)\, dx + \int_{-5}^{-3} (x^2 + 2x)\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \Big|_{-5}^{-3} = \left[\frac{(-3)^3}{3} + (-3)^2\right] - \left[\frac{(-5)^3}{3} + (-5)^2\right] = 0 - \left(-\frac{50}{3}\right) = \frac{50}{3}$

Área bajo la curva es $\frac{50}{3}$

c) $\int_{.5}^{1} e^{x^3} x^2 dx$

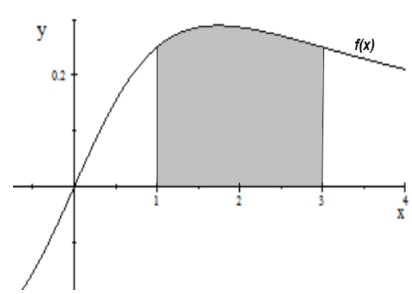


Completamos la diferencial y aplicamos la regla 8.

$\int_{.5}^{1} e^{x^3} x^2 dx = \int_{.5}^{1} e^{x^3} \frac{3}{3} x^2 dx = \frac{1}{3}\int_{.5}^{1} e^{x^3} 3x^2 dx = \frac{1}{3} e^{x^3}\Big|_{.5}^{1} = \frac{1}{3} e^{(1)^3} - \frac{1}{3}$

$= 0.906 - 0.377 \cong 0.528$

d) $\int_1^3 \frac{x\, dx}{x^2+3}$



Completamos la diferencial y aplicamos la regla 9.

$\int_1^3 \frac{xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2xdx}{x^2+3} = \frac{1}{2} Ln(x^2 + 3)\Big|_1^3 = \frac{1}{2} Ln(3^2 + 3) - \frac{1}{2} Ln(1^2 + 3) = 1.2425 - 0.693 \cong 0.55$

Propiedades de la integral definida

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en el intervalo $[a, b]$, y k un número real. La integral definida cumple las siguientes propiedades:

- La integral extendida en un punto, [a, a], es igual a cero. No hay área.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

- La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

- La integral de la suma de funciones es igual a la suma de sus integrales individuales. Si $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ existen, entonces,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

- Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, al permutar los límites de una integral, ésta cambia de signo.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

- Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, c]$, y sean tres puntos tales que a < b < c, entonces se cumple

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

5.5.1 Cálculo de áreas

Porqué utilizar el cálculo integral y no la geometría para encontrar áreas, la razón quizá es que la geometría solo nos permite encontrar áreas de figuras conocidas como rectángulos, círculos, etc.

Anteriormente calculamos el área bajo la curva de una función continúa delimitado por un intervalo [a, b] y las dos rectas que delimitan los intervalos, de ecuaciones $x = a$ y $x = b$. Este principio puede servir también para calcular las áreas comprendidas entre curvas, por simples operaciones aritméticas de adición y sustracción.

Sabemos que para encontrar esta área bajo la curva utilizamos la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ en el caso de que $f(x) \geq 0$ en $a \leq x \leq b$. Es claro que en este caso hablamos de áreas positivas, que se encuentran superiores al eje de las $x`s$. Por lo contrario, en el caso en que $y = f(x)$ y las líneas $x = a$ y $x = b$ y el eje $x`s$ cuando $f(x) \leq 0$, el área está situada debajo del eje x. El área total de una función estará dada por la expresión,

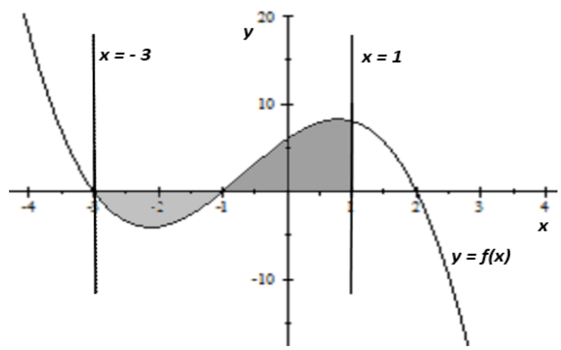
$$\acute{A}rea\ total = \sum(\acute{a}reas\ superiores\ al\ eje\ x) - \sum(\acute{a}reas\ inferiores\ al\ eje\ x)$$

Ejemplos.

a) Hallar el área limitada por la función $f(x) = 5x + 6 - x^3 - 2x^2$, el eje horizontal y las rectas $x = 1$ y $x = -3$

Solución: El gráfico nos dice que se trata de dos áreas una superior y otra inferior al eje horizontal, de esta manera la solución es,

Gráfica 5.xx gráfica del área que forman las funciones.



$$\int_{-1}^{1}(5x + 6 - x^3 - 2x^2)\,dx - \int_{-3}^{-1}(5x + 6 - x^3 - 2x^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{5}{2}x^2 + 6x - \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{5}{2}x^2 + 6x - \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_{-3}^{-1} =$$

$$= \left[\left(\frac{5}{2}1^2 + 6(1) - \frac{1^4}{4} - \frac{2(1^3)}{3}\right) - \left(\frac{5}{2}(-1)^2 + 6(-1) - \frac{(-1)^4}{4} - \frac{2(-1)^3}{3}\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\frac{5}{2}(-1)^2 + 6(-1) - \frac{(-1)^4}{4} - \frac{2(-1)^3}{3}\right) - \left(\frac{5}{2}(-3)^2 + 6(-3) - \frac{(-3)^4}{4} - \frac{2(-3)^3}{3}\right)\right] =$$

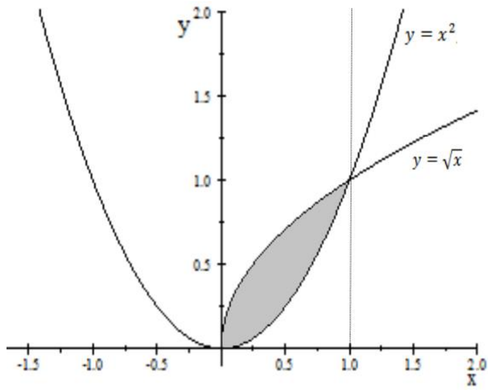
$$\left[\frac{91}{12} + \frac{37}{12}\right] - \left[-\frac{37}{12} - \frac{9}{4}\right] = \frac{32}{3} + \frac{16}{3} = 16$$

b) Encontrar el área entre las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ y las rectas, $x = 0$ y $x = 1$

Solución:

Recordemos que la integral definida nos da el área bajo la curva de una función. Para encontrar el área que nos piden debemos encontrar el área bajo la curva de la función $y = \sqrt{x}$ y restar el área de la función $y = x^2$ y delimitada por las rectas. Así, el área total será,

Gráfica 5.xx gráfica del área entre dos funciones.



En el caso de áreas formadas por dos curvas, como en este ejemplo, por consideraciones geométricas, el área de la intersección se calcula restando a la integral de $f(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$ el valor de la integral de $g(x)$ para ese mismo intervalo.

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \left[\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{(1)^3}{3}\right] - 0 = \frac{1}{3}$$

Ejercicios

1. *Resolver las siguientes integrales definidas.*
   1.1. $\int_{-1}^{5} \left(\frac{2}{x+5}\right) dx$

   1.2. $\int_{-2}^{4} \sqrt{5+2x}\, dx$

   1.3. $\int_{1}^{3} 6\, e^{-3x} dx$

   1.4. $\int_{2}^{5} \left(x^2 + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x+5}}\right) dx$

   1.5. $\int_{-1}^{1} (e^{-2x+3} + 2x^2 + 2) dx$
2. *Encontrar el área bajo la curva limitada por las siguientes funciones.*
   2.1. $y = 3x - 1; \quad x = 2; \quad x = 4$
   2.2. $y = (x-2)^3; \quad x = 2; \quad x = 3$
   2.3. $y = 20 - 3x^2;\ la\ línea\ x = 2\ y\ los\ ejes\ coordenados.$
   2.4. $y = 5x - x^2; \quad y = {}^{5}/_{4}\sqrt{x}\ \ y\ entre\ las\ lineas\ \ x = 1\ y\ \ x = 4$
   2.5. $y = e^{\frac{3x}{4}}; \quad y = 4 - 2x^2; x = 1\ \ y\ el\ eje\ de\ las\ y`s$

5.6 *Aplicaciones a la economía.*

Hasta ahora hemos visto aplicaciones importantes del cálculo integral para obtener primitivas y el área bajo la curva de una función, de igual manera es útil en la Economía para resolver una gran variedad de situaciones, algunas de las cuales vamos a tratar en lo que sigue.

5.6.1 *Valor futuro y valor presente de un flujo continuo de dinero.*

En economía se está interesado en conocer el valor futuro del dinero o que capital hay que invertir y a que tasa de interés i para que al después de t_n años obtengamos un capital $k(t)$. Supongamos que anualmente depositamos \$200 pesos a una cuenta de inversión a una tasa de interés del 5% anual. La pregunta es ¿Cuánto valdría nuestro capital 5 años después?

Este tipo de transacción en economía se le llama *valor futuro de un flujo constante de ingreso* y la fórmula para calcula este valor futuro es,

$$V_f = \int_0^{t_n} k(t)e^{i(t_n - t)}dt$$

Donde $k(t)$ es el capital, t_n son los años de inversión constante, i es la tasa de interés en porcentaje. Esta fórmula también se puede expresar como.

$$V_f = \int_0^{t_n} k(t)e^{i(t_n - t)}dt \qquad V_f = \int_0^{t_n} k(t)e^{it_n}e^{-it}dt = k(t)e^{it_n}\int_0^{t_n} e^{-it}dt$$

Para nuestro ejemplo, el depósito diario de 0 a 5 años, si la tasa de recepción del ingreso desde que t = 0 hasta que t = 5 es $k(t)$ por unidad de tiempo y el ingreso se deposita a medida que se recibe en una cuenta que paga interés a una tasa i por unidad de tiempo, compuesta en forma continua, entonces el valor de la cuenta a tiempo t = 5 es.

$$V_f = \int_0^5 200e^{0.05(5-t)}dt = -\frac{200}{0.05}\int_0^5 e^{0.05(5-t)}(-0.05)dt = -4000\, e^{0.05(5-t)}\Big|_0^5$$
$$= -4000\big(e^{0.05(5-5)}\big) - e^{0.05(5-0)}) = -4000(1 - e^{1/4}) = \$1{,}136.10$$

Es el valor futuro que se tendrá después de 5 años.

El *valor presente de un flujo de ingreso* que se deposita anualmente, por ejemplo, a una tasa de interés i en un plazo de t_n años,

$$V_p = \int_0^{t_n} k(t)e^{-it}dt$$

Supongamos que, de acuerdo con datos históricos, una empresa rural generará ingresos anuales de $150,000 pesos por los próximos 8 años. Si la tasa de interés i anual es del 4% ¿Cuál es el valor actual de la empresa?

$$V_p = \int_0^8 150{,}000\ e^{-0.04t}dt = \frac{150{,}000}{-0.04}\int_0^8 e^{-0.04t}(-0.04)dt =$$

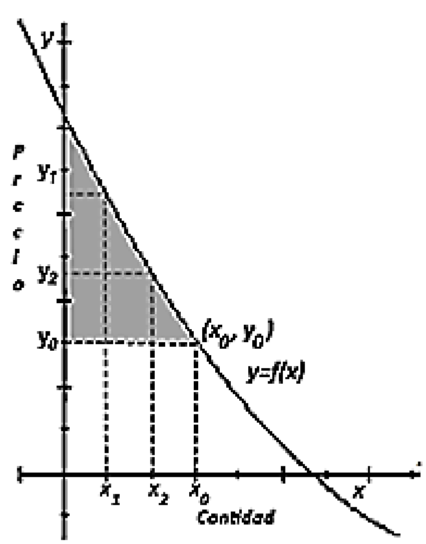
$$= \frac{150{,}000}{-0.04}e^{0.04t}\Big|_0^8 = -3{,}750{,}000\left[e^{0.04(8)} - e^{0.04(0)}\right] =$$

$$= -3{,}750{,}000[0.7265 - 1\,] = \$\ 1{,}026{,}937.5$$

5.6.2 Excedente del consumidor.

Un problema relevante de la economía aplicada es desarrollar una medida de las ganancias o pérdidas que experimentan los individuos como consecuencia de las variaciones de los precios.

Gráfica 5.xx Curva de demanda



Una manera de asignar un costo monetario a esta variación es a través del Excedente del consumidor que permite estimar las ganancias o las pérdidas de bienestar a partir de la información sobre la curva de demanda de mercado del bien.

El excedente del consumidor se define como la diferencia entre el precio máximo que estaría dispuesto a pagar por un bien y el precio que realmente paga.

Un consumidor va a una tienda a comprar un litro de leche a un precio de 12 pesos. Si embargo, al llegar la leche tiene un precio menos de 11 pesos. Puesto que el consumidor estaba dispuesto a pagar 12 pesos tiene un excedente de 1 peso.

Si el precio del mercado es y_0 y la demanda es x_0, aquellos consumidores que estén dispuestos a pagar un precio superior al del mercado, ganan. El consumidor estaría dispuesto a pagar y_1 por una cantidad inicial x_1, un precio de y_2, por una cantidadx_2 y así hasta la cantidad x_0 en donde coincide el precio que paga y el que está dispuesto a pagar

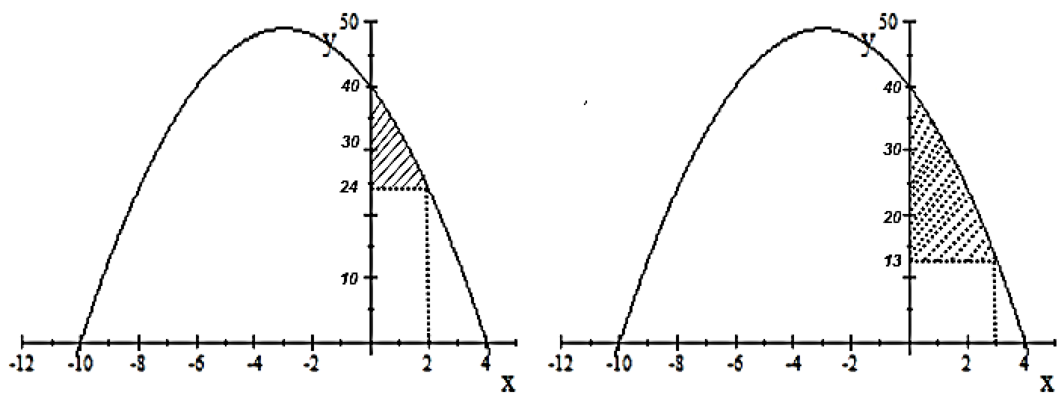
y_0. En la gráfica es la región que muestra la diferencia entre la disposición marginal a pagar y el precio del mercado.

Al aumentar el precio, el consumidor tiene que gastar $(y_1 - y_0)x_1$ más unidades monetarias para adquirir x_1 productos, lo mismo tendría que gastar para adquirir x_2 unidades, $(y_2 - y_0)x_2$

Pero a su vez el aumento del precio hace que los consumidores reduzcan la demanda, de x_o a x_1. El área sombreada es la variación del excedente del consumidor y se evalúa como,

$$Excedente\ del\ consumidor = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 y_0$$

Ejemplo. Si la función de demanda es $y = 40 - 6x - x^2$, determinar el excedente del consumidor si $x_0 = 2$ y cuando $y_0 = 13$



Solución,

Si $x_0 = 2$, el valor de y_0 correspondiente es $y_0(2) = 40 - 6(2) - (2)^2 = 24$. El excedente del consumidor (EC)

$$EC = \int_0^2 (40 - 6x - x^2)dx \ - (2)(24) = \left[40x - 3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \left(80 - 12 - \frac{8}{3}\right) - 48 = \frac{196}{3} - 48 = \frac{52}{3}$$

Si $y_0 = 13$, el valor de x_0 correspondiente es $13 = 40 - 6x_0 - {x_0}^2$. Los valores que satisfacen esta ecuación son,

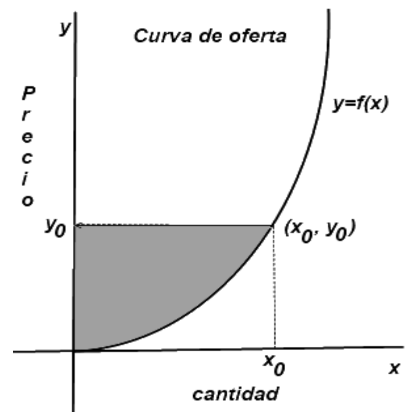
$$40 - 6x_0 - {x_0}^2 = 13 \quad \rightarrow \quad x_0(x_0 + 6) = 27$$

Los valores que satisfacen la ecuación son, $x_0 = 3$ y $x_0 = -9$, tomamos el valor positivo. Así, el excedente del consumidor (EC)

$$EC = \int_0^3 (40 - 6x - x^2)dx \; - (3)(13) = \left[40x - 3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$$
$$= \left(120 - 27 - \frac{27}{3}\right) - 39 = 84 - 39 = 45$$

5.6.3 Excedente del productor

El excedente del productor es la diferencia entre el precio mínimo que percibe el productor y el precio al que estaría dispuesto a vender sus productos. El productor obtiene el excedente del productor cuando los consumidores están dispuestos a pagar más que el precio mínimo del productor. Son las ganancias adicionales de los productores, debido a la competencia del mercado. Es la diferencia entre el precio que realmente recibe el productor y el mínimo que está dispuesto a recibir.



La ganancia total de los productores o Excedente del productor está dada por el área entre la curva de oferta y la recta horizontal y_0. Y se evalúa entonces así,

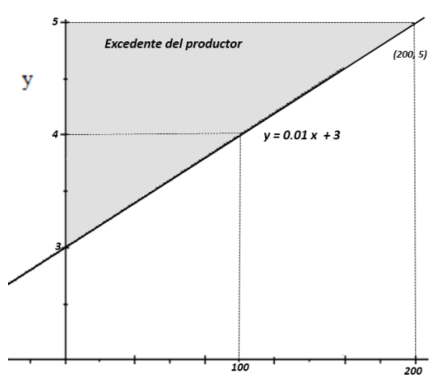
$$Excedente\ del\ \ productor = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx$$

Ejemplos:

a) Encontrar el excedente del productor para las siguientes ecuaciones de oferta y el nivel de precios x_0

   i. $y = 0.01x + 3;\;\; x_0 = 200$

   Primero calculamos el valor de $\;\; y_0 = 0.01(200) + 3 = 5$



El Excedente de productor (EP)

$EP = (200)(5) - \int_0^{200}(0.01x + 3)\,dx =$

$= \frac{0.01}{2}x^2 + 3x|\,_0^{200} = 0 - 0.005x^2 + 3x|\,_0^{200}$

$= 1000 - 800 - 0 = \$200$

   ii. $y = \frac{x^2}{9} + 1;\;\; x_0 = 3$

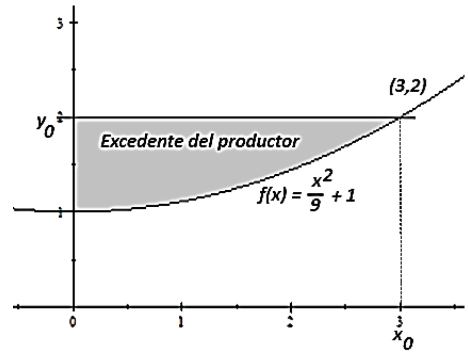
De la misma manera que en el ejercicio anterior, iniciamos por calcular del valor de y_0

$y_0 = \frac{3^2}{9} + 1 = 2$

El excedente del productor es,

$EP = (3)(2) - \int_0^3 \left(\frac{x^2}{9} + 1\right) dx =$

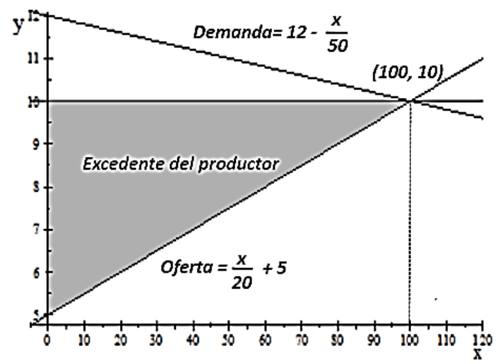
$= 6 - \frac{x^3}{27} + x|_{0}^{3} = 6 - 4 - 0 = \$2$



b) Las ecuaciones de demanda y de oferta de un cierto producto agrícola son; y_d y y_s.

i) Encontrar los valores de equilibrio.

ii) Dibujar y encontrar el excedente del productor de los siguientes modelos,



i. $y_d = 12 - \frac{x}{50}$ y $y_s = \frac{x}{20} + 5$

En primer igualamos las ecuaciones para encontrar el punto de equilibrio.

$$12 - \frac{x}{50} = \frac{x}{20} + 5 \qquad 12 - 5 = \frac{x}{50} + \frac{x}{20} \rightarrow \ 7 = \frac{5x + 2x}{100}$$

Se despeja y se obtiene x_0

$$700 = 7x \ \rightarrow \ x_0 = 100$$

Entonces $\qquad y_0 = \frac{100}{20} + 5 = 10$

El punto de equilibrio es $(100,10)$. Con estos valores encontramos el excedente del productor.

$$EP = (10)(100) - \int_0^{100} \left(\frac{x}{20} + 5\right) dx = 1000 - \left[\frac{x^2}{40} + 5x\right]_{0}^{100} =$$

$$= 1000 - 750 = \$\,250$$

ii. $y_d = 80 - 2.5x^2$ y $y_s = 8 + 8x$

El punto de equilibrio.

$$80 - 2.5x^2 = 8 + 8x$$

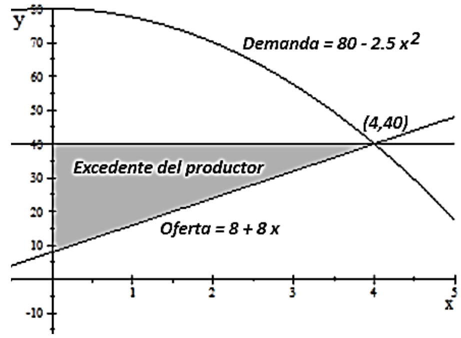
$$80 - 8 = 2.5x^2 + 8x$$

$$0 = 2.5x^2 + 8x - 72$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado,

$$x_{0,1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(2.5)(-72)}}{2(2.5}$$

$$x_{0,1} = \frac{-8 \pm 28}{5} = 4, -\frac{32}{5}$$



Evidentemente tomamos el valor positivo y entonces $x_0 = 4$ con este valor buscamos el valor correspondiente de $y_0 = 8 + 8(4) = 40$. El punto de equilibrio se encuentra en $(4, 40)$. Así, el excedente del productor que resulta es,

$$EP = (4)(40) - \int_0^4 (8 + 8x)\, dx = 160 - [8x + 4x^2]_0^4 =$$

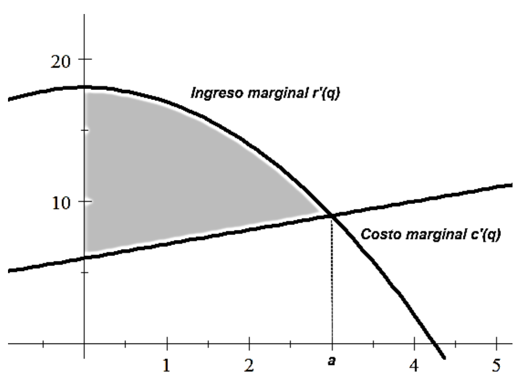
$$= 160 - 96 = 64$$

5.6.4 Beneficio máximo.

En general, el beneficio en una empresa y lo que determina su nivel de producción en la diferencia entre,

$$beneficio = Ingresos\ totales - costo\ total$$

Una decisión importante que tomar es ¿cuánto producir? Y la respuesta tendría que ser cuando el beneficio es máximo. En condiciones de competencia perfecta, el beneficio máximo se alcanza cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal. En un gráfico tendríamos lo siguiente,



De esta manera, el beneficio máximo lo obtenemos,

$$Beneficio\ máximo(\pi_{max}) = \int_0^a [r'(q) - c'(q)]\, dq$$

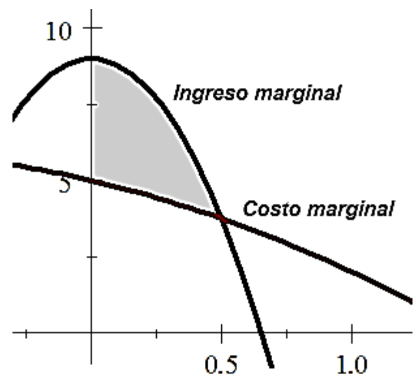
Ejemplo.

Si el precio y la cantidad vendida en una organización, en situación de competencia perfecta, se determinan por las funciones de demanda $y(x) = 9 - 7x^2$ y de costos $c(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$. Determinar el beneficio máximo en este punto.

Fijamos las funciones marginales de ingreso y de costos. En el caso del ingreso tendríamos,

Ingreso total$= (9 - 7x^2)x = 9x - 7x^3$ y el ingreso marginal $r'(x) = 9 - 21x^2$
El costo marginal $c'(x) = -x^2 - 2x + 5$

Estas funciones se representan en la gráfica,



Para maximizar el beneficio, igualamos las funciones de ingreso y de costo marginal,

$$9 - 21x^2 = -x^2 - 2x + 5$$
$$9 - 21x^2 + x^2 + 2x - 5 = 0$$
$$-20x^2 + 2x + 4 = 0$$

La ecuación tiene como solución,

$$x_1 = \frac{1}{2} \; y \; x_2 = -\frac{2}{5}$$

Solo x_1 tiene sentido económico, de esta manera,

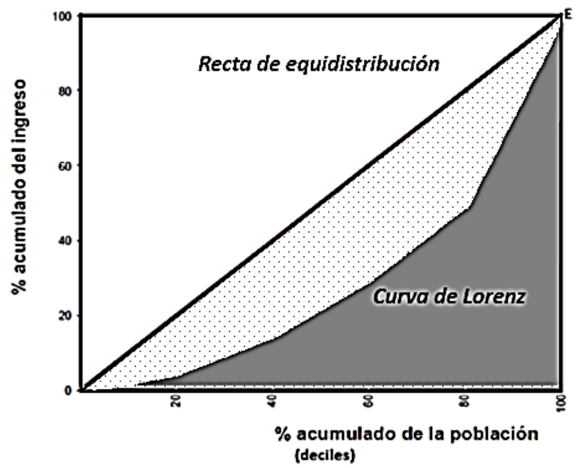
$$Beneficio\ máximo = \int_0^{1/2} (-20x^2 + 2x + 4)dx = \left[-\frac{20}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_0^{1/2} = \frac{17}{12}$$

5.6.5 Curva de Lorenz.

En economía se utiliza la curva de Lorenz para describir la distribución del ingreso de las familias en un país. La curva de Lorenz toma valores reales entre $[0,1]$ con puntos extremos $(0,0)$ y $(1,1)$ y es continua, creciente y cóncava hacia arriba.

En esta curva se relacionan los porcentajes acumulados de población, generalmente divididos en porcentajes acumulados de ingreso que esta población recibe. En el eje de abscisas se representa la población "ordenada" de forma que los percentiles de ingresos más bajos quedan a la izquierda y los más altos a la derecha.

Gráfica 5. Curva de Lorenz



Los puntos en la curva se determinan ordenando todas las familias según sus ingresos y se calculan los porcentajes de ellas con respecto al total. No hay familias con ingreso 'cero' y la suma del ingreso de todas las familias es 'uno'.

Si la curva coincide con la recta de equidistribución, tendríamos una condición de ingreso equitativo. El área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ mide en cuánto difiere la distribución del ingreso del ingreso equitativo. En otras palabras, mientras más se acerque la curva de Lorenz a la recta de equidistribución es más equitativa; por lo contrario, si se aleja será menos equitativa.

Se llama coeficiente de desigualdad a la relación,

$$L = \frac{Area\ entre\ la\ curva\ de\ Lorez\ y\ la\ recta\ de\ equidistribución}{área\ bajo\ la\ recta\ de\ equidistribución.}$$

El área bajo la línea de equidistribución es un rectángulo de base y altura la unidad, entonces el coeficiente es,

$$L = \frac{\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 l(x)dx}{1/2} = 2\int_0^1 \big(x - l(x)\big)dx$$

Cuando este coeficiente cero, la distribución del ingreso es equitativa y mientras se acerque al valor de uno, la distribución será más inequitativa.

Ejemplo:

Encontrar el coeficiente de desigualdad si la curva de Lorenz es $y = f(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$,

$$L = 2\int_0^1 \left[x - \left(\frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x\right)\right]dx = 2\int_0^1 \left[-\frac{15}{16}x^2 + \frac{15}{16}x\right]dx = 2\left(\frac{15}{16}\right)\int_0^1 (x - x^2)dx$$

$$= \frac{15}{8}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{15}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0\right) = \frac{5}{16} \cong 0.312$$

¿Qué proporción del ingreso recibe el 20% de las familias?

$$f(.2) = \frac{15}{16}(.2)^2 + \frac{1}{16}(.2) = 0.05$$

El 20% de las familias recibe el 5% del ingreso total.

Ejercicios.

1. *Una persona deposita \$100 pesos en una cuenta de ahorro a una tasa de interés compuesto continuo del 5% ¿cuál será el valor del dinero durante los próximos 10 años?*
2. *Suponga que una cantidad es depositada constantemente en una cuenta de ahorro a una tasa de \$4500 pesos por año. Determine el monto al final de 6 años, con una tasa de interés compuesto continuo del 6%*
3. *Encuentre el excedente del consumidor productor para las siguientes funciones de demanda, a un nivel de venta* x
   3.1. $p_d = 10/(3x+25)$ *a un nivel de venta de 20 pesos.*
   3.2. $p_d = 1+(x+3)^2$ *a un nivel de venta de 3 pesos.*
   3.3. $p_d = 2+2x^2$ *a un nivel de venta de 2 pesos.*
4. *Encuentre el excedente del productor para las siguientes funciones de oferta, a un nivel de venta* x
   4.1. $p_s = 5+0.01(x-1)^2$ *a un nivel de venta de 25 pesos.*
   4.2. $p_s = 4+2\sqrt{x}$ *a un nivel de venta de 36 pesos.*
   4.3. $p_s = 3-0.001(2x-0.1)^2$ *a un nivel de venta de 3 pesos.*
5. *En un mercado de competencia perfecta, para un producto dado. Calcular los excedentes del consumidor y del productor para las siguientes funciones de demanda,*
   5.1. $p_d = 10/(3x+25)$ *y* $p_s = 5+0.01(x-1)^2$
   5.2. $p_d = \frac{-8}{3}x+8$ *y* $p_s = 2+2x^2$
   5.3. $p_d = -\frac{1}{2}x^2+1$ *y* $p_s = -1.8+\frac{1}{3}(x+2)^2$
6. *La distribución del ingreso de un país sigue la curva de Lorenz* $y = \frac{19}{20}x^2+\frac{1}{20}x$. *¿Qué proporción del ingreso recibe el* 12% *de las familias?*

5.7 Técnicas de Integración.

Recordemos que la integración es el proceso inverso de la derivación. Sin embargo, la integración es más complicada de llevar a cabo. Si en una función se incluyen funciones elementales, como $f(x)=e^x$ o $g(x)=x^n$, encontrar su derivada es simple. Por otra parte, hemos visto métodos de cálculo que nos permiten diferenciar, casi cualquier función que pueda escribir. Si bien, para muchos de los problemas de integración se tienen fórmulas que permiten su solución directa, en algunos no tenemos un procedimiento simple. Por ejemplo, para encontrar la antiderivada de una función elemental como $f(x)=e^{x^2}$ no es tan simple. Incluso en casos donde la antiderivada existe, la técnica para encontrarla es difícil. Por esta razón presentamos estas tres técnicas de integración para hacer frente a este tipo de problemas.

5.7.1 Integración por sustitución

Este método de integración por sustitución también se le conoce como método de cambio de variable. Se basa en realizar un reemplazo de variables adecuado que permita convertir el integrando en algo sencillo con una integral o antiderivada simple. Este método del cambio de variable es la versión integral a la regla de la cadena en la derivación.

Por la regla de la cadena sabemos que, dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ y $F(x)$ es la antiderivada para $f(x)$, la regla de la cadena establece que,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

Sustituimos $F'(x)$ por $f(x)$

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = f(g(x))g'(x)$$

Si integramos esta función tenemos,

$$\int \frac{d}{dx}[F(g(x))] = \int f\,(g(x))g'(x)dx$$

Finalmente

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = F\left(g(x)\right) + c$$

Para la integral definida tendremos,

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)dx = F(g(x))|_a^b$$

Ejemplos:

a) Sean $\int (3x^2 + 2x^3 + 3)(6x^2 + 6x)\,dx$

Hacemos $u = (3x^2 + 2x^3 + 3)$ y su diferencial $\frac{du}{dx} = 6x + 6x^2$

Despejamos y tenemos

$$du = (6x + 6x^2)dx$$

Sustituimos los valores de u y du en la integral original y nos queda

$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} + c$$

Finalmente remplazamos los valores originales y tenemos la solución.

$$\int (3x^2 + 2x^3 + 3)(6x^2 + 6x)\,dx = \frac{\left(3x^2+2x^3+3\right)^2}{2} + c$$

Una forma alternativa de resolver este problema sería multiplicar los polinomios y después realizar la integración; sin embargo, el método de cambio de variable es más rápido.

b) $\int (3x-3)^2\, dx$

En este ejercicio hacemos $u = 3x - 3$ la diferencial es $du = 3dx$ y $\frac{du}{3} = dx$

sustituimos en la integral original y nos queda,

$\int u^2 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^2\, du = \frac{1}{3}\left(\left[\frac{u^3}{3}\right]\right) + c$ sí sustituimos el resultado es,

$\int (3x-3)^2\, dx = \frac{(3x-3)^3}{9} + c$

c) $\int x^2\sqrt{x+1}\, dx$

$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx$, efectuamos el cambio de variable de manera que

$u = x + 1, \frac{du}{dx} = 1$ despejamos $x = u - 1$ y elevamos al cuadrado

$x^2 = (u-1)^2$ Sustituimos y nos queda la integral

$\int (u-1)^2\sqrt{u}\, dx = \int (u^2 - 2u + 1)\sqrt{u}\, du = \int (\sqrt{u} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{5}{2}})du$

$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + c$ Sustituimos nuevamente y tenemos

$$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} + c$$

$$= \frac{70(x+1)^{\frac{3}{2}} - 84(x+1)^{\frac{5}{2}} + 30(x+1)^{\frac{7}{2}}}{105} + c$$

$$= \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{105}[35 - 84(x+1) + 30(x+1)^2] + c$$

$$= \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{105}[8 - 12x + 15x^2] + c$$

d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}dx$ para eliminar el término $\sqrt{x^2-1}$, realizamos la siguiente sustitución $u = x^2 - 1$ de donde $du = 2xdx \;\rightarrow\; \frac{du}{2} = xdx$, asimismo $x^2 = u + 1$,

Sustituimos en la integral original,

$$\int \frac{x^2 x\, dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{(u+1)du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int (u+1)\, u^{-1/2}du = \frac{1}{2}\int (u^{1/2} + u^{-1/2})\, du$$

$$= \frac{u^{3/2}}{3} + u^{1/2} + c = \frac{1}{3} u^{1/2}\ (u+3) + c$$

Sustituimos hacia atrás $u = x^2 - 1$

$$= \frac{1}{3}(x^2-1)^{1/2}\ (x^2 - 1 + 3) + c = \ \frac{(x^2-1)^{1/2}}{3}(x^2+2) + c$$

e) $\int \frac{e^{3x}+5}{e^{2x}} dx$ Hacemos la siguiente sustitución.

$u = e^x$ y $du = e^x dx$ sustituimos y despejamos $dx = \frac{du}{u}$

$$\int \frac{e^{3x}+5}{e^{2x}} dx = \int \frac{u^3+5}{u^2.u} du = \int \frac{u^3+5}{u^3} du = \int \frac{u^3}{u^3} du + \int \frac{5}{u^3} du$$

$$\int du + 5\int \frac{du}{u^3} = u - \frac{5}{2u^2} + c$$

Sustituimos hacia atrás y

$$\int \frac{e^{3x}+5}{e^{2x}} dx = e^x - \frac{5}{2e^{2x}} + c$$

f) $\int_2^4 \frac{e^{\sqrt{x+5}}}{\sqrt{x+5}} dx$

Realizamos el cambio de variable siguiente, $u^2 = x + 5$ y su derivada $2u\, du = dx$, sustituimos en la integral original,

$$\int_2^4 \frac{e^u}{u}(2u) du = 2\int_2^4 e^u du = 2e^u|_2^4$$

Rescribimos la solución,

$$\int_2^4 \frac{e^{\sqrt{x+5}}}{\sqrt{x+5}} dx = 2e^{\sqrt{x+5}}\Big|_2^4 = 2e^3 - 2e^{\sqrt{7}} \cong 11.983$$

g) $\int_0^5 x\sqrt{4+x}\, dx$

Proponemos el siguiente cambio $u^2 = 4 + x$ la derivada $2u\, du = dx$, despejando tenemos $x = u^2 - 4$ y $u = \sqrt{4+x}$,

$$\int_0^5 (u^2-4)\, u(2u) du = 2\int_0^5 (u^4 - 4u^2)\, du = 2\frac{u^5}{5} - 8\frac{u^3}{3}\Big|_0^5$$

$$= \frac{6u^5 - 40u^3}{15}\Big|_0^5 = \frac{2}{15}u^3(3u^2-20)\Big|_0^5 = \frac{2}{15}(4+x)^{\frac{3}{2}}(3x-8)\Big|_0^5$$

$$= \left[\frac{126}{5}\right] - \left[-\frac{128}{15}\right] = \frac{506}{15}$$

De los ejemplos anteriores podemos deducir una metodología para la integración de funciones por sustitución o cambio de variable.

1) Definir una nueva variable, $u = g(x)$ de manera que el cambio nos permita simplificar la función a integrar.
2) Despejar la nueva variable y obtener su derivada,
3) Modificar la integral y dejarla en términos de la nueva variable.
4) Integrar la función en términos de u y rescribir la solución en términos de x remplazando u por la función equivalente $g(x)$

5.7.2 Integración por partes

En algunas funciones aplicar la integración directamente no es posible. De acuerdo con la naturaleza de la función, podemos probar su solución por el método de integración por partes para encontrar la función primitiva.

Este método se utiliza cuando tenemos un producto de funciones. Para deducir el método de integración partimos de la derivada de un producto. Más precisamente, para dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ derivables, tenemos

$$\frac{d}{dx}u(x)v(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

Para deducir la fórmula de integración por partes, integramos esta última, recordemos que la integración es proceso inverso de la derivación.

$$\int \frac{d}{dx}u(x)v(x)dx = \int u'(x).v(x)dx + \int u(x).v'(x)dx$$

Nos queda,

$$u(x)v(x) = \int u'(x).v(x)dx + \int u(x).v'(x)dx$$

Despejamos y tenemos finalmente la fórmula de integración por partes

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x).v(x)dx$$

Para la integral definida,

$$\int_a^b u(x).v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)dx$$

Ejemplos.

a) $\int x\, e^{ax} dx$

Para aplicar integración por partes tomamos $u = x$ su diferencial es $du = dx$, por el otro lado hacemos $dv = e^{ax} dx$ integramos ambos lados de la ecuación y nos queda, $v = \frac{e^{ax}}{a}$ con estos valores realizamos el cálculo,

$$\int x\, e^{ax} dx = \frac{x}{a} e^{ax} - \int \frac{e^{ax}}{a} dx = \frac{x}{a} e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax}\, dx$$
$$= \frac{x}{a} e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + c = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + c$$

b) $\int \ln(x)\, dx$

Hacemos $u = \ln(x)$ entonces $du = \frac{1}{x} dx$

$dv = dx$ y $v = x$

Se aplica la fórmula de logaritmos

$$\int \ln(x)\, dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = xln(x) - x + c = x(\ln(x) - 1) + c$$

c) $\int e^x (1 + x)^2 dx$

Hacemos $u = (1 + x)^2$ entonces $du = 2(1 + x) dx$

$dv = e^x\, dx$ y $v = e^x$

Usamos la formula y tenemos,

$$\int e^x (1 + x)^2 dx = (1 + x)^2 e^x - 2 \int (1 + x) e^x\, dx$$

Se aplica nuevamente integración por partes para resolver la nueva integral, ahora hacemos

$u = (1 + x)$ y $du = dx$
$dv = e^x\, dx$ $v = e^x$

Empleamos la formula

$$\int e^x (1 + x)^2 dx = (1 + x)^2 e^x - 2 \left[(1 + x) e^x - \int e^x\, dx \right]$$
$$= (1 + x)^2 e^x - 2[(1 + x) e^x - e^x] + c$$
$$= e^x (1 + 2x + x^2 - 2 - 2x + 2) + c = e^x (x^2 + 1) + c$$

d) $\int_1^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

Hacemos $u = x$ entonces $du = dx$

$$dv = \sqrt{x+1}\,dx \quad \text{y} \quad v = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$$

Se aplica la formula,

$$\int_1^3 x\sqrt{x+1}\,dx = (x)\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{2x}{3}(1+x)^{3/2} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2(1+x)^{5/2}}{5}\right)\right]_1^3 = \left[\left(\frac{2}{15}\right)(1+x)^{3/2}(3x-2)\right]_1^3$$

$$= \left[\left(\frac{2}{15}\right)(4)^{3/2}(7)\right] - \left[\left(\frac{2}{15}\right)(2)^{3/2}(1)\right] = \frac{112}{15} - \frac{4\sqrt{2}}{15} = 7.089$$

e) $\int_1^3 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$

Hacemos $u = xe^x$ entonces $du = xe^x + e^x = e^x(x+1)$

$$dv = \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \quad \text{y} \quad v = \frac{-1}{1+x}$$

Aplicamos el procedimiento

$$\int_1^3 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = \left[xe^x\left(\frac{-1}{1+x}\right) - \int \frac{-1}{1+x}e^x(x+1)dx\right]_1^3$$

$$= \left[-\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x\,dx\right]_1^3 = \left[-\frac{xe^x}{1+x} + e^x\right]_1^3 = \left[\frac{e^x(1+x) - xe^x}{1+x}\right]_1^3$$

$$= \left[\frac{e^x}{1+x}\right]_1^3 = \left[\frac{e^3}{4}\right] - \left[\frac{e^1}{2}\right] \cong 3.662$$

f) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Iniciamos haciendo el siguiente cambio $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int x^2\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Cambio de variable $u = x^2$ y su derivada $du = 2xdx$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{y} \quad v = -(1-x^2)^{1/2}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -x^2(1-x^2)^{1/2} - \int -2x(1-x^2)^{1/2}dx$$

$$= -x^2(1-x^2)^{1/2} - \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} + c =$$

$$-\frac{(1-x^2)^{1/2}}{3}(3x^2 + 2(1-x^2) + c$$

$$= -\frac{(1-x^2)^{1/2}}{3}(x^2+2) + c$$

Ejercicios.

1. $\int 2(2x-1)^4 dx = 8x(x-1) + c$
2. $\int (1+2x)(x^2+3x)dx = \frac{x^2}{6}(3x^2+14x+9) + c$
3. $\int 3\,x^2\sqrt{x^3-3}\ dx = \sqrt{x^3-3}\ \left(\frac{2}{3}x^3-2\right) + c$
4. $\int \frac{-4x}{(1-2x^2)} dx = ln\left(x^2-\frac{1}{2}\right) + c$
5. $\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx = \frac{15}{8}$
6. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx = 1$
7. $\int_3^7 x\sqrt{x-3}\,dx = \frac{144}{5}$
8. $\int (ln\,x)^2\,dx = x(ln^2x - 2lnx + 2) + c$
9. $\int x\,e^{5x}dx = \frac{1}{25}e^{5x}(5x-1) + c$
10. $\int (2x+5)(x+1)^{1/2}dx = \frac{2}{5}(2x+7(x+1)^{3/2} + c$
11. $\int (7-3\mathrm{x}^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}(3\mathrm{x}^2+6\mathrm{x}-1)$
12. $\int_{-1}^2 \frac{\mathrm{x}^2}{\sqrt{\mathrm{x}+4}}\mathrm{dx} = \frac{2}{15}\sqrt{\mathrm{x}+4}(3\mathrm{x}^2-16\mathrm{x}+128) = 1.324$
13. $\int_0^3 \mathrm{x}\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{x}}\mathrm{dx} = -\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3\mathrm{x}}(3\mathrm{x}+1) = 0.11$
14. $\int_1^2 \frac{\ln \mathrm{x}}{\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} = 0.1534$

5.7.3 Integración por fracciones parciales

Si la función a integrar $f(x)$ es una fracción racional, es posible reducir esta fracción en fracciones simples que nos permitan encontrar primitivas. Este método es útil para fracciones propias[4]; es decir, cuando el grado del polinomio del numerador es menor al grado del polinomio del denominador. Si $A(x)$ y $B(x)$ son dos polinomios, las fracciones que podemos resolver con este proceso tienen la forma,

[4] Si la fracción es impropia se puede hacer propia al efectuar la división y después integrar. Por ejemplo, si tenemos $\frac{x^3-2x}{x-1}$, efectuamos la división y nos queda $\frac{x^3-2x}{x-1} = x^2 + x - 1 - \frac{1}{x-1}$

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n} \qquad m < n$$

Para reducir esta fracción, tenemos que factorizar el denominador para efectuar la descomposición en fracciones parciales equivalentes, de acuerdo con los criterios que se indican en la siguiente tabla.

Factor	**Fracción parcial correspondiente**	
Factor lineal simple $ax + b$	$\frac{A}{ax+b}$	*A es una constante*
Factor Lineal múltiple $(ax+b)^n$	$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$	$A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes
Factor cuadrático simple $ax^2 + bx + c$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$	A y B son constantes
Factor cuadrático múltiple $(ax^2+bx+c)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$	$A_1, .. A_n$ y $B_1 \ldots B_n$ son constantes

Ejemplos.

a) $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$

Realizamos una primera corrección. $\quad x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$

Expresamos la función en las siguientes fracciones simples,

$$\frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)}$$

Para encontrar los valores de A, B y C establecemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$1 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$
$$1 = A(x^2-1) + B(x^2-x) + C(x^2+x)$$
$$1 = x^2(A+B+C) + x(C-B) - A$$

Se igualan los factores de lado izquierdo y derecho de la igualdad y deducimos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ C-B=0 \\ -A=1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A=-1 \\ C=B \\ B+C=1 \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} A=-1 \\ B={}^{1}/_{2} \\ C={}^{1}/_{2} \end{matrix}$$

Sustituimos estos valores y nos queda

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{1/2}{(x+1)}dx + \int \frac{1/2}{(x-1)}dx$$

$$= -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) + c$$

b) $\int \frac{2x-1}{x^2+5x}dx$

Primero probamos que sea una fracción propia, en nuestro caso lo es, porque el grado del polinomio del denominador es mayor.

Expresamos la función como una suma de fracciones simples

$$\frac{2x-1}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} \rightarrow 2x-1 = A(x+5) + Bx$$

Agrupamos de acuerdo con la variable x

$$A+B=2 \;\; y \;\; 5A=-1 \;\therefore A=-\frac{1}{5}\;;\;\; B=2+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$$

Finalmente sustituimos los valores de A y B y resolvemos la integral que resulta.

$$\int \frac{2x-1}{x^2+5x}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{1}{x}dx + \frac{11}{5}\int \frac{1}{x+5}dx$$

$$= -\frac{1}{5}ln(x) + \frac{11}{5}ln(x+5) + c$$

c) $\int \frac{x^4-x^3+x^2+3x-2}{x^2+x-2}dx$

Es una fracción impropia, tenemos que resolver primero la división polinómica,

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 2x + 5 \\ \hline x^2 + x - 2 & x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ & -x^4 - x^3 + 2x^2 \\ \hline & -2x^3 + 3x^2 + 3x \\ & 2x^3 + 2x^2 - 4x \\ \hline & 5x^2 - x - 2 \\ & -5x^2 - 5x + 10 \\ \hline & 6x + 8 \end{array}$$

De esta manera la integral a resolver es,

$$\int \frac{x^4-x^3+x^2+3x-2}{x^2+x-2}dx =$$

$$= \int \left(x^2 - 2x + 5 - \frac{6x-8}{x^2+x-2}\right)dx$$

$$= \int x^2dx - \int 2x\,dx + \int 5\;dx - \int \frac{6x-8}{x^2+x-2}\;dx$$

Nos vamos a ocupar por el momento en la última integral, ya que las tres primeras se resuelven por medio de las reglas de integración directa. Así, buscamos las raíces del polinomio,

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

Las fracciones parciales correspondientes a la fracción,

$$\frac{6x-8}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)}$$

Es sistema de ecuaciones correspondiente,

$A + \ B = \ 6$ Despejamos en la segunda ecuación y nos da $A = 2B + 8$,
$-A + 2B = -8$ Sustituimos. $3B = -2 \ \therefore B = -\frac{2}{3}$ y por consiguiente $A = \frac{20}{3}$

Finalmente sustituimos las constantes y nos queda,

$$\int x^2 dx - \int 2x\, dx + \int 5\ dx - \int \frac{20}{3(x+2)} dx + \int \frac{2}{3(x-1)}\ dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x - \frac{20}{3}\ln(x+2) + \frac{2}{3}\ln(x-1) + c$$

d) $\int \frac{x-3}{x^2+8x+16} dx$

En primer lugar, es una fracción propia. Buscamos las raíces del polinomio $x^2 + 8x + 16$, como es una ecuación de 2º grado

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(16)}}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \text{ raiz doble}$$

Expresamos la función como una suma de fracciones simples

$$\frac{x-3}{(x+4)^2} = \frac{A_1}{x+4} + \frac{A_2}{(x+4)^2} \ \rightarrow \ x - 3 = A_1(x+4) + A_2$$

Para encontrar los valores A_1 y A_2 partimos de las ecuaciones,

$A_1 x = 1$ y $4A_1 + A_2 = -3 \quad \therefore \quad A_2 = -3 - 4 = -7$

Finalmente, se sustituyen las constantes en las fracciones simples,

$$\int \frac{x-3}{x^2+x-20} dx = \int \frac{1}{x+4} dx - 7\int \frac{1}{(x+4)^2} dx$$
$$= \ln(x+4) + \frac{7}{(x+4)} + c$$

e) $\int \frac{6x-5}{x^2+x-20} dx$

En primer lugar, es una fracción propia.

Segundo, Encontramos las raíces del polinomio $x^2 + x - 20$, como es una ecuación de 2º grado

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-20)}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2} = 4, -5$$

Expresamos la función como una suma de fracciones simples

$$\frac{6x-5}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5} \;\rightarrow\; 6x-5 = A(x+5) + B(x-4)$$

Agrupamos de acuerdo con la variable x

$$6x - 5 = x(A+B) + (5A - 4B)$$

Tercero, buscamos los valores de A y B, al desarrollar las siguientes ecuaciones

$$A + B = 6$$
$$5A - 4B = -5$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, multiplicamos por 4 la primera ecuación

$$A + \; B = 6 \quad (4)$$
$$5A - 4B = -5$$

$$9A = 19 \;\therefore\; A = \frac{19}{9}$$

Se sustituye el valor de A en la primera ecuación

$$\frac{19}{9} + B = 6 \;\therefore\; B = \frac{35}{9}$$

Finalmente, después de sustituir los valores de las constantes A y B

$$\int \frac{6x-5}{x^2+x-20}dx = \int \frac{19}{9}\frac{1}{x-4}dx + \int \frac{35}{9}\frac{1}{x+5}dx$$
$$= \frac{19}{9}ln(x-4) + \frac{35}{9}ln(x+5) + c$$

f) $\int_4^8 \frac{3x^2+x-4}{x^3-2x^2-3x}dx$

Es una fracción propia. Las raíces del polinomio son,

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3)$$

Son tres raíces, la primera es cero, $x_1 = 0$ las otras las buscamos por la ecuación de segundo grado y son

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 3, -1$$

Expresamos la fracción como suma de fracciones simples así,

$$\frac{3x^2+x-4}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

Agrupamos y obtenemos los valores de A, B y C

$$3x^2 + x - 4 = A(x-3)(x+1) + B(x)(x-3) + C(x)(x+1)$$
$$= A(x^2 - 2x - 3) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 + x)$$
$$= x^2(A + B + C) + x(-2A - 3B + C) - 3A$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones,

$$\begin{array}{c} -3A = -4 \\ A + B + C = 3 \\ -2A - 3B + C = 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} A = {}^{4}/_{3} \\ B = {}^{5}/_{3} - C \\ -3({}^{5}/_{3} - C) + C = {}^{11}/_{3} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} A = {}^{4}/_{3} \\ B = -{}^{1}/_{2} \\ C = {}^{13}/_{6} \end{array}$$

Sustituimos estos valores de $A = \frac{4}{3}$, $B = -\frac{1}{2}$ y $C = \frac{13}{6}$ y resolvemos la integral

$$\int_4^8 \frac{3x^2 + x - 4}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx = \frac{4}{3}\int_4^8 \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\int_4^8 \frac{1}{x+1} dx + \frac{13}{6}\int_4^8 \frac{1}{x-3} dx =$$

$$= \frac{4}{3}\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{13}{6}\ln(x-3)\Big|_4^8$$

$$= \left[\frac{4}{3}\ln 8 - \frac{1}{2}\ln 9 + \frac{13}{6}\ln 5\right] - \left[\frac{4}{3}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 5\right] = 5.161 - 1.043 = 4.117$$

g) $\int_1^3 \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} dx$

Es una fracción propia. Para encontrar las raíces del polinomio se usa división sintética,

Dado el polinomio $p(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$, buscamos raíces enteras; por lo que iniciamos con divisores de -9 ($\pm 1, \pm 3, \pm 9$).

1	5	3	-9	-3
	-3	-6	9	
1	2	-3	0	

Una primera raíz es $(x + 3)$ el polinomio nos queda,

$$p(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x + 3)(x^2 + 2x - 3)$$

Son tres raíces, la primera es cero, $x_1 = -3$ las otras las buscamos por la ecuación de segundo grado y son

$$x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1, -3$$

Tenemos una raíz doble $(x + 3)^2$ y $(x - 1)$. Expresamos la fracción como suma de fracciones simples,

$$\frac{2x^2 - x - 1}{(x+3)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{B}{x-1}$$

Agrupamos y encontramos los valores de A, B y C

$$2x^2 - x - 1 = A_1(x+3)(x-1) + A_2(x-1) + B(x+3)^2$$
$$= A_1(x^2 + 2x - 3) + A_2x - A_2 + B(x^2 + 6x + 9)$$
$$= (A_1 + B)x^2 + (2A_1 + A_2 + 6B)x + (-3A_1 - A_2 + 9B)$$

$A_1 + B = 2$	Sumamos las tres	Sustituimos y $A_1 = 2$
$2A_1 + A_2 + 6B = -1$	ecuaciones y $B = 0$	$4 + A_2 = -1 \therefore A_2 = -5$
$-3A_1 - A_2 + 9B = -1$		Sustituimos estos valores

$$\int_1^3 \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}dx = \int_1^3 \frac{2}{x+3}dx + \int_1^3 \frac{-5}{(x+3)^2}dx$$

$$= 2\ln(x+3) + \frac{5}{x+3}\Big|_1^3 = \left[2\ln 6 + \frac{5}{6}\right] - \left[2\ln 4 + \frac{5}{4}\right] = 4.417 - 4.0226 = 0.394$$

De la solución de estos ejercicios, se deduce la siguiente metodología para la solución de integrales por el método de fracciones parciales.

1) Verificamos que sean una fracción propia. Si es impropia efectuamos la división y después integramos
2) Encontramos las raíces del polinomio del denominador.
3) Expresamos la fracción en fracciones parciales simples, de acuerdo con la tabla que se definió arriba.
4) Buscamos los valores de las Constantes A, B, etc
5) Sustituimos los valores de las constantes en las fracciones parciales e integramos

Ejercicios

1) $\int \frac{x-3}{x^3+2x^2}dx = \frac{5}{4}lnx - \frac{5}{4}\ln(x+2) + \frac{3}{2x} + c$
2) $\int \frac{7+2x}{x^2-x-2}dx = \frac{11}{3}\ln(x-2) - \frac{5}{3}\ln(x+1) + c$
3) $\int \frac{x-3}{x^2-2x+1}dx = ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + c$
4) $\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}dx = 2\ln(x+5) - \ln(x-2) + c$
5) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)\Big]_2^3 = 0.49$
6) $\int_2^4 \frac{x+5}{(x+5)^2(x-1)}dx = \frac{1}{6}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x+5)\Big]_2^4 = 0.141$

Bibliografía.

Alpha C. Chiang ***Métodos Fundamentales de Economía Matemática***. Ed. McGraw-Hill, 1987.USA

Anderson, D. R., D. J. Sweeney y T. A. Williams. (2008). ***Estadística para la administración y la economía.*** (10ª ed). México: CENGAGE Learning. 260-262.

Anton Howard ***INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA LINEAL***, Editorial LIMUSA S.A. de C.V., Grupo Noriega Editores, México 1992.

Apostol T. M ***CALCULUS, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al algebra lineal***. Editorial Reverté Ediciones, Volumen I, México, 1999.

Arya Jagdish C., Lardner Robin W., ***MATEMÁTICAS APLICADAS a la administración y a la economía.*** Quinta edición Prentice hall, México 1993.

Barnett, R. A., Ziegler, M. R., Byleen, K. E., **COLLEGE ALGEBRA**, seventh edition, McGraw-Hill, New York USA, 2001

Buchaman, L. , *Limites (una transición al cálculo*, Editorial EASO, México, 1985

Budnick Frank S, MATEMÁTICAS APLICADAS PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA Y CIENCIAS SOCIALES, McGraw-Hill, S.A. de C.V, México, 2004.

Dodge, Clayton W. ***Sets, logic and Numbers.*** Prindle, Weber & Schmit, incorporated. Boston 1969.

Draper Jean E. y Klingman Jane S. **Matemáticas para Administración y Economía.** Editorial Harla, México, 1976.

Garza Tomás, ***Elementos de cálculo de probabilidades***. UNAM, México, 1983

Goldstein, L. J, Lay D. C., Schneider, D. I. ***CALCULUS AND ITS APPLICATIONS,*** Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey USA, 1993.

Haeussler, Jr E.F., Richard S. Paul, Wood Richard J., ***Matemáticas para administración y economía.***, Pearson, México, 2008.

Hairer, E., Warner, G. Analysis by its history. Springer, New York 2008.

Hammond P.J. y Sydsaeter Knut. ***Matemáticas para el Análisis Económico***. ED. Prentice Hall, 1998. México.

Hillier, F.S. y Liebermann, G.J. **Introducción a la Investigación de Operaciones.** Ed. McGraw-Hill. 2001.

Hernandez H, Fernando. ***Teoría de conjuntos (una introducción).*** Sociedad Mexicana de Matemáticas, México 2009.

INEI, ***GUIA PARA LA PRESENTACION DE GRAFICOS ESTADÍSTICOS.*** Instituto Nacional de Estadística e Informática, Centro de Investigación y Desarrollo, Lima Perú, agosto 2009

Keller Gerard, Warrack Brian, ***STATISTICS for management and economics.*** Duxbury Press, USA, 1997.

Larson R.E., Hostetler R. P. y Edwards B. H. ***CÁLCULO Y GEOMETRIA ANALÍTICA***. Sexta edición, Editorial Mc Graw Hill, Madrid

Levine I. Richard, ***Estadística para administradores, Prentice-Hall-Hispanoamericana, S.A.*** México 1987

Levine, D. M., T. C. Krehbiel y M. L. Berenson. (2006). ***Estadística para la administración.*** (4ta ed). México: Pearson Prentice Hall. 221.

Lind, D. A., W. G. Marchal, y S. A. Wathen. (2008). ***Estadística aplicada a los negocios y a la economía**.* (13a ed). México: McGraw-Hill. 262, 265, 266

Mendenhall William, Reinmuth James. ***ESTADISTICA PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMIA.*** *Grupo editoria Iberoamerica 1978. México*

Pasinetti Luigi, LECCIONES DE TEORIA DE LA PRODUCCIÓN, Fondo de Cultura Económica, México, 1984.

Simonnard M. ***Programation Linéaire.*** Ed Dunond, 1972. Francia.
Bibliografía

Stevenson William J, ***ESTADISTICA PARA ADMINISTRACION Y ECONOMIA***. Conceptos y aplicaciones. OXFORD University Press, 1981, México.

Webster Allen L. ***ESTADISTICA APLICADA A LOS NEGOCIOS Y LA ECONOMIA,*** *tercera edición McGraw-Hill 2000. México*